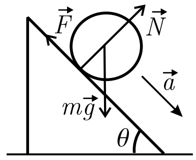
Решења задатака са републичког такмичења из физике ученика средњих школа школске 2000/2001. године
I разред

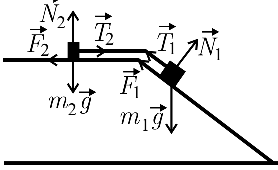
1. Ако масу планете означимо са M, а интензитет њене угаоне брзине са ω, онда за тело масе m које мирује у односу на планету на екватору мора да важи $\gamma\, m\, M/R^2 = m\, v_z^2/R$ $\boxed{\textbf{2 п}}$, где је $v_z = \omega\, R$ интензитет брзине тела. Одавде добијамо услов $\gamma\, M = \omega^2\, R^3$ $\boxed{\textbf{1 п}}$. За геостационарни сателит масе m_s који се налази на висини d морало би да важи $\gamma\, m_s\, M/(R+d)^2 = m_s\, v_s^2/(R+d)$ $\boxed{\textbf{2 п}}$, где је $v_s = \omega\,(R+d)$ $\boxed{\textbf{1 п}}$ интензитет брзине сателита. Одавде бисмо добили $\gamma\, M = \omega^2\,(R+d)^3$ $\boxed{\textbf{1 п}}$. Међутим, како за планету важи $\gamma\, M = \omega^2\, R^3 < \omega^2\,(R+d)^3$ $\boxed{\textbf{3 п}}$, видимо да услов геостационарности није могуће задовољити без интервенције у виду додатне силе која делује на сателит. Како је
$$\frac{m_s\, v_s^2}{R+d} - \frac{\gamma\, m_s\, M}{(R+d)^2} = \frac{\gamma\, m_s\, M}{(R+d)^2}\left(\frac{\omega^2\,(R+d)^3}{\gamma\, M} - 1\right) = \frac{\gamma\, m_s\, M}{(R+d)^2}\left[\left(\frac{R+d}{R}\right)^3 - 1\right] \boxed{\textbf{4 п}}\,,$$
где смо искористили услов $\gamma\, M = \omega^2\, R^3$, видимо да мотор мора да делује на сателит вучном силом $\vec{F}_v = \vec{F}_g\,[(R+d)^3/R^3 - 1]$, која има исти правац и смер као и гравитациона сила којом Земља делује на сателит $\vec{F}_g$. Однос интензитета је $F_v/F_g = (R+d)^3/R^3 - 1$ $\boxed{\textbf{3 п}}$. За $d = R$ добијамо $F_v/F_g = 7$ $\boxed{\textbf{2 п}}$. Како овај однос не зависи од масе сателита, он се неће мењати са смањењем те масе $\boxed{\textbf{1 п}}$.

2. Размотримо прво ситуацију са слике 1: тело масе m, полупречника R и момента инерције I котрља се без проклизавања по стмој равни нагибног угла $\theta = 30^0$. На то тело делује гравитациона сила $m\vec{g}$, сила реакције стрме равни $\vec{N}$ и сила $\vec{F}$ која омогућава котрљање без проклизавања. У правцу дуж стрме равни важи $m\, a = m\, g/2 - F$ $\boxed{\textbf{3 п}}$, где је a интензитет убрзања тела, док за интензитет угаоног убрзање тела α имамо $F\, R = I\, \alpha$ $\boxed{\textbf{3 п}}$. Како је $a = \alpha\, R$ $\boxed{\textbf{2 п}}$, имамо $F = I\, a/R^2$, па је $m\, a = m\, g/2 - I\, a/R^2$, одакле следи $a = \frac{g/2}{1+I/m\,R^2}$ $\boxed{\textbf{2 п}}$. За лопту је однос $I/m\,R^2$ једнак $2/5$, док је за прстен овај однос 1, па је интензитет убрзања лопте $a_l = 5\,g/14$ $\boxed{\textbf{2 п}}$, а интензитет убрзања прстена $a_p = g/4$ $\boxed{\textbf{2 п}}$. Ако дужину стрме равни означимо са l, тада ће лопта стићи у подножје за време t_l дато са $l = a_l\, t_l^2/2$, одакле је $t_l = \sqrt{2\,l/a_l}$, а за прстен се добија време $t_p = \sqrt{2\,l/a_p}$. Однос ових времена је $t_l/t_p = \sqrt{a_p/a_l}$, односно $t_l/t_p = \sqrt{7/10}$ $\boxed{\textbf{5 п}}$. Како је $\sqrt{7/10} \approx 0.84 < 1$, у подножје ће прва стићи лопта $\boxed{\textbf{1 п}}$.

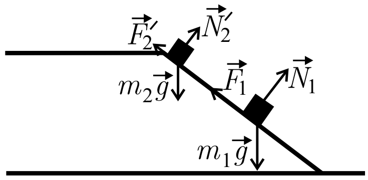


Слика 1

3. Време ћемо мерити од тренутка бацања лоптице. За разлику од Душана, координатни систем ћемо везати за непокретну подлогу и то тако да је x–оса у правцу и смеру кретања аутобуса и да пролази кроз лоптицу у тренутку $t = 0$, а да је y–оса усмерена вертикално нагоре и такође пролази кроз лоптицу у тренутку $t = 0$. Ако интензитет брзине аутобуса у тренутку $t = 0$ означимо са v_0, онда је x–координата лоптице дата са $x(t) = (v_0 + u_0\,\sqrt{2}/2)\, t$ $\boxed{\textbf{3 п}}$, а $y(t) = u_0\, t\,\sqrt{2}/2 - g\, t^2/2$ $\boxed{\textbf{3 п}}$, пошто је лоптица бачена под углом од 45^0. Лоптица је ударила у главу професора у тренутку $t = T$ за који важи $y(T) = 0$, па је $T = u_0\,\sqrt{2}/g$ $\boxed{\textbf{2 п}}$. У том тренутку се лоптица налази у тачки са x–координатом $x(T)$, а аутобус се померио по x–оси за растојање $d = v_0\, T - a\, T^2/2$ $\boxed{\textbf{2 п}}$, па важи $l_1 = x(T) - d = (1 + a/g)\, u_0^2/g$ $\boxed{\textbf{3 п}}$. Да се аутобус кретао константном брзином, лоптица би се померила у односу на аутобус за $u_0^2/g = l_0$, одакле је $u_0 = \sqrt{l_0\, g}$ $\boxed{\textbf{2 п}}$, односно $u_0 = 4.5\,\mathrm{m/s}$ $\boxed{\textbf{1 п}}$. Из $l_1/l_0 = 1 + a/g$ следи $a = (l_1/l_0 - 1)\, g$ $\boxed{\textbf{3 п}}$, односно $a = 10\,\mathrm{m/s^2}$ $\boxed{\textbf{1 п}}$.



Слика 2

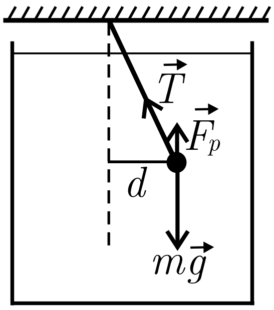


Слика 3

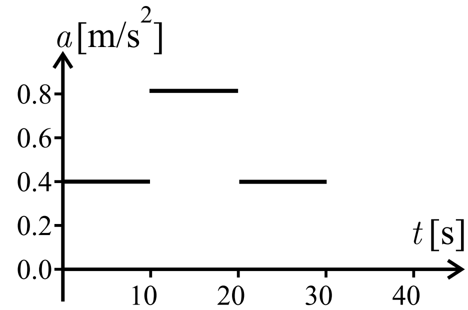
4. Док друго тело не пређе ивицу стрме равни, интензитети убрзања и брзина оба тела су једнаки. Уз ознаке са слике 2, за прво тело важи $N_1 = m_1\, g\,\sqrt{2}/2$ $\boxed{\textbf{1 п}}$ и $F_1 = \mu_1\, N_1$ $\boxed{\textbf{1 п}}$. Ако са a означимо интензитет убрзања тела, тада је $m_1\, a = m_1\, g\,\sqrt{2}/2 - F_1 - T$ $\boxed{\textbf{2 п}}$, где је $T = |\vec{T}_1| = |\vec{T}_2|$. За друго тело важи $N_2 = m_2\, g$ $\boxed{\textbf{1 п}}$ и $F_2 = \mu_2\, N_2$ $\boxed{\textbf{1 п}}$. Из $m_2\, a = T - F_2 = T - \mu_2\, m_2\, g$ $\boxed{\textbf{2 п}}$, сабирањем са претходном једначином за a добијамо $(m_1 + m_2)\, a = (1 - \mu_1)\, m_1\, g\,\sqrt{2}/2 - \mu_2\, m_2\, g$, одакле након замене вредности датих у задатку следи $a = (0.50\,\sqrt{2} - 0.25)\, g/3 = 1.5\,\mathrm{m/s^2}$ $\boxed{\textbf{3 п}}$. Крећући се убрзањем интензитета a друго тело ће до ивице стрме равни доћи за време t_0 дато са $l = a\, t_0^2/2 \Rightarrow t_0 = \sqrt{2\,l/a}$ $\boxed{\textbf{1 п}}$. Интензитети брзина оба тела у том тренутку биће једнаки и износиће $v_0 = a\, t_0 = \sqrt{2\,a\,l}$. Како је $\mu_2 < \mu_1$ и $m_2 < m_1$, након тог тренутка интензитет силе трења која делује на друго тело ће бити мањи од интензитета силе трења која делује на прво тело. То значи да ће интензитет убрзања другог тела бити већи од интензитета убрзања првог тела, а исто ће важити и за брзине тела.

Дакле, конац више неће играти никакву улогу $\boxed{\textbf{1 п}}$. Ако са a_1 означимо интензитет убрзања првог тела након што друго тело пређе ивицу стрме равни, уз ознаке са слике 3 добијамо једначину $m_1 a_1 = m_1 g\sqrt{2}/2 - F_1 = (1-\mu_1) m_1 g \sqrt{2}/2$, односно $a_1 = (1-\mu_1) g\sqrt{2}/2 = 3.5\,\mathrm{m/s^2}$ $\boxed{\textbf{1 п}}$. За друго тело важи $m_2 a_2 = m_2 g\sqrt{2}/2 - F_2'$, где је a_2 интензитет његовог убрзања након што пређе ивицу стрме равни, а $F_2' = \mu_2 N_2' = \mu_2 m_2 g \sqrt{2}/2$, па добијамо $m_2 a_2 = (1-\mu_2) m_2 g\sqrt{2}/2 \Rightarrow a_2 = (1-\mu_2) g\sqrt{2}/2$. Одавде је $a_2 = 5.2\,\mathrm{m/s^2}$ $\boxed{\textbf{1 п}}$. Рачунајући дуж стрме равни и у односу на њен почетак, положај првог тела је дат са $s_1 = l + v_0 t + a_1 t^2/2$, док је положај другог тела $s_2 = v_0 t + a_2 t^2/2$, где се време мери од тренутка када се друго тело нађе на стрмој равни. Тела ће се сударити у тренутку $t = t_{12}$ за који је испуњен услов $s_1 = s_2$, односно $l + v_0 t_{12} + a_1 t_{12}^2/2 = v_0 t_{12} + a_2 t_{12}^2/2 \Rightarrow t_{12} = \sqrt{2l/(a_2-a_1)}$ $\boxed{\textbf{2 п}}$. Дакле, од почетка кретања до судара ће проћи $t_0 + t_{12} = \sqrt{2l/a} + \sqrt{2l/(a_2-a_1)} = 2.2\,\mathrm{s}$ $\boxed{\textbf{1 п}}$. Интензитети брзина тела након поласка другог тела са врха стрме равни су дати са $v_1 = v_0 + a_1 t$ за прво тело и $v_2 = v_0 + a_2 t$ за друго тело, па је интензитет релативне брзине другог тела у односу на прво тело у тренутку судара једнак $v_{12} = v_2 - v_1 = (a_2 - a_1) t_{12} = 1.9\,\mathrm{m/s}$ $\boxed{\textbf{1 п}}$. Правац ове брзине је паралелан са стрмом равни, а смер је наниже $\boxed{\textbf{1 п}}$.

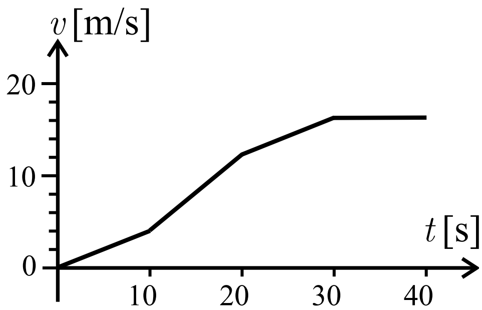
5. Ако се воз креће са константним убрзањем интензитета a и куглица масе m мирује у односу на вагон (слика 4), тада у хоризонталном правцу важи $ma = T_h$ $\boxed{\textbf{1 п}}$, где је T_h интензитет хоризонталне компоненте силе затезања нити $\vec{T}$, док у вертикалном правцу важи $F_p + T_v = mg$ $\boxed{\textbf{2 п}}$, где је F_p интензитет силе потиска, а T_v интензитет вертикалне компоненте силе затезања нити $\vec{T}$. Како је $F_p = \rho_1 V g$ $\boxed{\textbf{1 п}}$, где је V запремина куглице, а $m = \rho_2 V$, имамо $F_p = \frac{\rho_1}{\rho_2}\rho_2 V g = kmg$, где смо увели ознаку $k = \rho_1/\rho_2$. Сада је $T_v = mg - F_p = (1-k)mg$, па је $T_v/T_h = (1-k)g/a$, одакле је $a = (1-k)gT_h/T_v$. Из сличности троуглова је $T_h/T_v = d/\sqrt{l^2-d^2}$, па коначно добијамо $a = (1-k)g/\sqrt{(l/d)^2 - 1}$ $\boxed{\textbf{2 п}}$. Познато је да је пригушење клатна које се налази у ваздуху веома мало и да би у условима датим у задатку за $10\,\mathrm{s}$ амплитуда клатна била само мало смањена. Зато је искоришћена посуда са глицерином који је веома вискозан и повећава отпор средине, па се куглица зауставља за време које је краће од $10\,\mathrm{s}$. Ово је веома важно јер нам омогућава да очитамо вредност отклона куглице за сваки од интервала, па је посуда са глицерином неопходна у овом експерименту $\boxed{\textbf{1 п}}$. Дакле, када воз почне да се креће са убрзањем интензитета a_1 на интервалу $(0.00\,\mathrm{s}, 10.00\,\mathrm{s})$, куглица почне да осцилује и заустави се са отклоном $d_1 = 0.20\,\mathrm{m}$ $\boxed{\textbf{1 п}}$. На основу раније изведене релације добијамо $a_1 = 0.40\,\mathrm{m/s^2}$ $\boxed{\textbf{1 п}}$. Интензитет брзине воза на овом интервалу је дат са $v(t) = a_1 t$. Слично, за интервал $(10.00\,\mathrm{s}, 20.00\,\mathrm{s})$ отклон је $d_2 = 0.40\,\mathrm{m}$ $\boxed{\textbf{1 п}}$ и интензитет убрзања $a_2 = 0.81\,\mathrm{m/s^2}$ $\boxed{\textbf{1 п}}$. Интензитет брзине воза на овом интервалу је $v(t) = v(t_1) + a_2(t - t_1)$, где је $t_1 = 10.00\,\mathrm{s}$, а $v(t_1) = a_1 t_1 = 4.0\,\mathrm{m/s}$. За интервал $(20.00\,\mathrm{s}, 30.00\,\mathrm{s})$ отклон је $d_3 = 0.20\,\mathrm{m}$ $\boxed{\textbf{1 п}}$, чему одговара интензитет убрзања $a_3 = 0.40\,\mathrm{m/s^2}$ $\boxed{\textbf{1 п}}$. Интензитет брзине воза на овом интервалу је $v(t) = v(t_2) + a_3(t - t_2)$, где је $t_2 = 20.00\,\mathrm{s}$, а $v(t_2) = v(t_1) + a_2(t_2 - t_1) = 12\,\mathrm{m/s}$. Након $t = 30.00\,\mathrm{s}$ отклон куглице пада на нулу, па је и убрзање једнако нули. Брзина је, наравно, константна и њен интензитет износи $v(t) = v(t_3) = v(t_2) + a_3(t_3 - t_2) = 16\,\mathrm{m/s}$, где је $t_3 = 30.00\,\mathrm{s}$. На сликама 5 и 6 приказана је временска зависност интензитета убрзања и брзине воза. Сваки од три сегмента са слике 5 доноси по поен (укупно $\boxed{\textbf{3 п}}$), као и сваки од четири сегмента са слике 6 (укупно $\boxed{\textbf{4 п}}$).



Слика 4



Слика 5



Слика 6

Задатке припремио: Антун Балаж
Рецензент: др Сунчица Елезовић-Хаџић
Председник комисије: др Мићо Митровић