Решења задатака са 36. савезног такмичења ученика средњих школа из физике – Бечићи, јун 2001. године
I разред

1. Ако интензитет брзине плочице на подлози означимо са u, а интензитет брзине левог клина са v, из закона одржања импулса следи $mu = Mv \Rightarrow v = mu/M$ $\boxed{\textbf{3 п}}$, док је из закона одржања енергије $mgh = mu^2/2 + Mv^2/2$ $\boxed{\textbf{4 п}}$, па након замене израза за v добијамо $u = \sqrt{2gh/(1+m/M)}$ $\boxed{\textbf{3 п}}$. Ако интензитет брзине десног клина у тренутку када се плочица попне на максималну висину h' означимо са V, из закона одржања импулса следи $mu = (m+M)V \Rightarrow V = mu/(m+M)$ $\boxed{\textbf{3 п}}$. Из закона одржања енергије је $mu^2/2 = (m+M)V^2/2 + mgh'$ $\boxed{\textbf{4 п}}$, па је $h' = u^2/2g - (m+M)V^2/2mg$. Ако искористимо добијене изразе за u и V, следи $h' = h/(1+m/M)^2$ $\boxed{\textbf{3 п}}$.

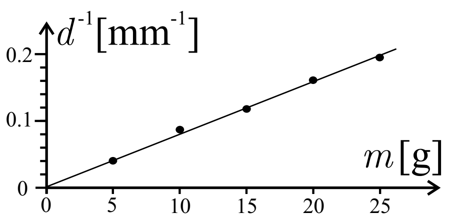
2. а) Ако са ω означимо интензитет угаоне брзине штапа у тренутку удара у подлогу, тада су интензитети брзина куглица једнаки $v_1 = \omega L/3$, $v_2 = 2\omega L/3$ и $v_3 = \omega L$, односно $v_2 = 2v_1$ $\boxed{\textbf{1 п}}$ и $v_3 = 3v_1$ $\boxed{\textbf{1 п}}$. Из закона одржања енергије $mgL/3 + 2mgL/3 + mgL = mv_1^2/2 + mv_2^2/2 + mv_3^2/2$ $\boxed{\textbf{2 п}}$, где је m маса сваке од куглица, заменом израза за v_2 и v_3 добијамо $2mgL = 7mv_1^2$, односно $v_1 = \sqrt{2gL/7}$ $\boxed{\textbf{1 п}}$, $v_2 = 2\sqrt{2gL/7}$ $\boxed{\textbf{1 п}}$ и $v_3 = 3\sqrt{2gL/7}$ $\boxed{\textbf{1 п}}$. За дату вредност дужине L је $v_1 = 1.8\,\mathrm{m/s}$ $\boxed{\textbf{1 п}}$, $v_2 = 3.7\,\mathrm{m/s}$ $\boxed{\textbf{1 п}}$ и $v_3 = 5.5\,\mathrm{m/s}$ $\boxed{\textbf{1 п}}$.

   б) Ако је v интензитет брзине тега у равнотежном положају, важи $mv^2/2 = mgh$ $\boxed{\textbf{3 п}}$, одакле је $mv^2 = 2mgh$. Како је $T = mg + mv^2/l$ $\boxed{\textbf{3 п}}$, добијамо $T = mg(1 + 2h/l)$ $\boxed{\textbf{2 п}}$. Максимална могућа вредност за h је $h_m = 2l$ и она даје силу затезања интензитета $T_m = 5mg < T_0 = 6mg$, па је свака могућа вредност за h (цео интервал $[0,\, 2\,l]$) дозвољена $\boxed{\textbf{2 п}}$.

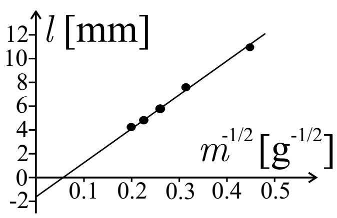
3. Из закона одржања енергије следи $-\gamma m(M_1+M_2)/r_1 = -\gamma m(M_1+M_2)/r_2 + mv^2/2$ $\boxed{\textbf{2 п}}$, где је m маса брода. Одатле је $M_1 + M_2 = v^2 r_1 r_2 / 2\gamma(r_1 - r_2)$ $\boxed{\textbf{2 п}}$, односно $M_1 + M_2 = 2.58 \cdot 10^{31}\,\mathrm{kg}$ $\boxed{\textbf{1 п}}$. Из III Кеплеровог закона следи $R^3 = \gamma(M_1+M_2)T^2/4\pi^2$ $\boxed{\textbf{2 п}}$, односно $R = 21.7 \cdot 10^6\,\mathrm{km}$ $\boxed{\textbf{1 п}}$. Полупречник орбите невидљивог пратиоца је $R_2 = R - R_1 = 13.8 \cdot 10^6\,\mathrm{km}$ $\boxed{\textbf{1 п}}$. Пошто оба објекта круже око центра масе, мора да важи $M_1 R_1 = M_2 R_2$ $\boxed{\textbf{5 п}}$, одакле је $k = M_1/M_2 = R_2/R_1 = 1.74$, па добијамо $M_1 = (M_1+M_2)/(1+1/k) = 1.64 \cdot 10^{31}\,\mathrm{kg} = 8.27 M_s$ $\boxed{\textbf{2 п}}$ и $M_2 = (M_1+M_2) - M_1 = 9.40 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg} = 4.75 M_s$ $\boxed{\textbf{2 п}}$. Како је $M_2 > 3M_s$ $\boxed{\textbf{2 п}}$, закључујемо да је могуће да је невидљиви пратилац црна рупа.

4. Ако човек стане на један крај чамца и постави га под углом од 90^0 у односу обалу тако да другим крајем додирује обалу, а затим пређе на други крај чамца (ближи обали) крећући се константном брзином интензитета v, чамац ће се удаљавати од обале константном брзином интензитета V и из закона одржања импулса следи $mv = MV$ (брзине мерене у односу на обалу). Ако је t време кретања, l дужина чамца, а x растојање за које се чамац удаљи од обале (l и x могу да се измере помоћу траке за мерење дужине), онда је $mvt = MVt$ $\boxed{\textbf{3 п}}$, а како је $vt = l - x$ $\boxed{\textbf{5 п}}$ и $Vt = x$ $\boxed{\textbf{5 п}}$, добијамо $m(l-x) = Mx$, одакле је $M = m(l/x - 1)$ $\boxed{\textbf{2 п}}$.

5. Нека је $v_0(m)$ интензитет почетне брзине пројектила масе m. Из израза $E_0 = mv_0^2(m)/2$ следи да је $v_0(m) = \sqrt{2E_0/m}$ $\boxed{\textbf{1 п}}$. Ако дубину продирања пројектила масе m означимо са $d(m)$, онда је $v_0^2(m) = 2F(m)d(m)/m$, одакле је $E_0 = F(m)d(m)$, односно $F(m) = E_0/d(m)$. На основу датих података не можемо да нацртамо зависност $F(m)$ јер не знамо вредност E_0, али можемо да нацртамо зависност $F(m)/E_0 = 1/d(m)$ $\boxed{\textbf{3 п}}$, која је приказана на слици 1 $\boxed{\textbf{4 п}}$. У питању је линеарна зависност $F(m)/E_0 = \alpha m$ $\boxed{\textbf{1 п}}$, где је $\alpha \approx 8.0 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{g^{-1}\,mm^{-1}} = 8.0 \cdot 10^3\,\mathrm{kg^{-1}\,m^{-1}}$ $\boxed{\textbf{3 п}}$. Сада је $F(m) = \alpha E_0 m$. У другом експерименту је $l(m) = v_0(m)t_0 - F(m)t_0^2/2m = t_0\sqrt{2E_0/m} - \alpha E_0 t_0^2/2$ $\boxed{\textbf{3 п}}$, па ако нацртамо зависност дебљине плоче l од $x = 1/\sqrt{m}$ $\boxed{\textbf{3 п}}$, добићемо линеарну зависност $l(x) = Ax - B$, где је $A = t_0\sqrt{2E_0}$ и $B = \alpha E_0 t_0^2/2$. Са слике 2 $\boxed{\textbf{4 п}}$ се добија $A \approx 28\,\mathrm{g^{1/2}\,mm} = 8.9 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{kg^{1/2}\,m}$ и $B \approx 1.6\,\mathrm{mm}$, па је $E_0 = A^2/2t_0^2 \approx 0.40\,\mathrm{J}$, односно $E_0 = 2B/\alpha t_0^2 \approx 0.39\,\mathrm{J}$ $\boxed{\textbf{2 п}}$. Видимо да су ове две вредности међусобно сагласне, као што и очекујемо. Коначно, $F(m) = km$, где је $k = \alpha E_0 \approx 3.2 \cdot 10^3\,\mathrm{m/s^2}$ $\boxed{\textbf{1 п}}$.



Слика 1



Слика 2

Задатке припремио: Антун Балаж
Рецензент: др Сунчица Елезовић-Хаџић
Председник комисије: др Мићо Митровић