

TEORIJSKI ZADACI

Utorak, 23. jul 2002.

Molimo vas pročitajte prvo sledeće:

1. Za izradu teorijskih zadataka imate na raspolaganju 5 sati.
2. Koristite samo priloženu olovku.
3. Koristite samo prednju stranu listova za pisanje.
4. Počnite izradu svakog dela zadatka na posebnom listu papira.
5. Za svako pitanje, kao dodatak **listu za odgovore (*answer sheet*)**, na koji morate napisati vaša rešenja, imate nekoliko listova za usputan rad.
6. Brojne vrednosti napišite sa **onoliko značajnih cifara** koliko odgovara datim podacima.
7. Napišite na **listu za odgovore (*answer sheet*)** sve što smatrate da je neophodno za rešenje zadataka. Molimo vas da koristite *što je moguće manje teksta*, izražavajte se prvenstveno jednačinama, brojevima, slikama i graficima. Za izražavanje fizičkih veličina koristite simbole koji su dati u tekstu.
8. Popunite zaglavlje svakog korišćenog lista papira upisivanjem naziva vaše zemlje (***Country***), vašeg broja (***Student No.***), broja zadatka (***Question No.***), progresivnog broja svake strane za dati zadatak (***Page No.***) i ukupnog broja papira korišćenih za svaki zadatak (***Total Pages***). Na vrhu svakog lista napišite broj zadatka i broj pitanja na koje odgovarate. Ako ste koristili prazne papire za zabeleške koje ne želite da budu ocenjene, precrtajte ih velikim slovom X preko cele strane i nemojte ih uključiti u numerisanje.
9. Na kraju izrade zadataka poredajte sve listove za svaki zadatak posebno *po sledećem redosledu*:
 - Listovi za odgovore (*answer sheet*) u odgovarajućem redosledu
 - Listovi za usputan rad
 - Listovi za koje ne želite da budu ocenjivani
 - Neiskorišćeni listovi i tekst zadatka

Stavite listove u kovertu i ostavite sve na vašem stolu. Nije dozvoljeno iznošenje *bilo kakvih* listova iz prostorije.

I. Radar za otkrivanje podzemnih objekata

Radar za otkrivanje podzemnih objekata (ROPO) koristi se za detektovanje i lociranje podzemnih objekata blizu površine zemljišta emitovanjem elektromagnetnih talasa kroz zemljište i detektovanjem talasa reflektovanih od objekata u zemljištu. Predajna i prijemna antena nalaze se na samoj površini zemljišta i smeštene su na približno istom mestu.

Električno polje linearno polarizovanog ravnog elektromagnetnog talasa ugaone frekvencije ω koji se kreće u pravcu z -ose opisuje se jednačinom:

$$E = E_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z), \quad (1)$$

gde su: E_0 - konstanta, α - koeficijent prigušenja i β - talasni broj, dati redom:

$$\alpha = \omega \left\{ \frac{\mu\epsilon}{2} \left[\left(1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2} \right)^{1/2} - 1 \right] \right\}^{1/2}, \quad \beta = \omega \left\{ \frac{\mu\epsilon}{2} \left[\left(1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2} \right)^{1/2} + 1 \right] \right\}^{1/2}, \quad (2)$$

a μ , ϵ i σ su redom magnetna propustljivost, dielektrična propustljivost i električna provodljivost.

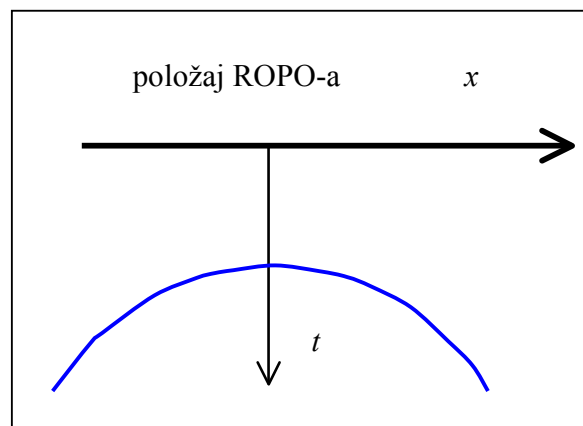
Prijemnik ne može da detektuje radarski signal koji se reflektuje od objekta ukoliko je amplituda tog signala pala ispod $1/e$ ($\approx 37\%$) od početne vrednosti. Obično se koriste elektromagnetni talasi različitih frekvencija (10 MHz – 1000 MHz), da bi se omogućilo podešavanje dometa i rezolucije detektora.

Karakteristike ROPO-a zavise od njegove rezolucije. Ona je data kao minimalno rastojanje između dva bliska reflektujuća objekta koja se još uvek mogu posebno detektovati. To minimalno rastojanje odgovara minimalnoj faznoj razlici od 180° između dva detektovana talasa reflektovana od objekata.

Pitanja:

(Dato: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m i $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ F/m)

1. Pretpostavite da je zemljište nemagnetni materijal ($\mu = \mu_0$) i da je veoma strogo zadovoljen uslov $\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2 \ll 1$. Izvedite izraz za brzinu prostiranja talasa v u funkciji od μ i ϵ korišćenjem jednačina (1) i (2). **[1.0 poena]**
2. Odredite maksimalnu dubinu na kojoj može da se detektuje objekat u zemljištu čija je električna provodljivost 1.0 mS/m, dielektrična propustljivost $9\epsilon_0$ i ako je zadovoljen uslov $\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2 \ll 1$. ($S = \Omega^{-1}$; koristite $\mu = \mu_0$). **[2.0 poena]**
3. Razmotrite dva paralelna provodna štapova koja se nalaze horizontalno u zemljištu. Svaki od štapova je na dubini od 4 m. Zemljište ima električnu provodljivost 1.0 mS/m i dielektričnu propustljivost $9\epsilon_0$. Pretpostavite da se ROPO merenje vrši približno iznad jednog od štapova i da se koristi tačkasti detektor. Odredite minimalnu frekvenciju potrebnu da bi rezolucija uređaja bila 50 cm. Smatrajte da uslov $\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2 \ll 1$ važi sa istom strogošću kao u prethodnom pitanju. **[3.5 poena]**
4. Da biste odredili dubinu d na kojoj se nalazi štap u zemljištu, za koje važe isti uslovi kao i u prethodnom pitanju, razmotrite merenja izvršena pomeranjem ROPO-a duž linije normalne na štap. Rezultati su prikazani na sledećoj slici:



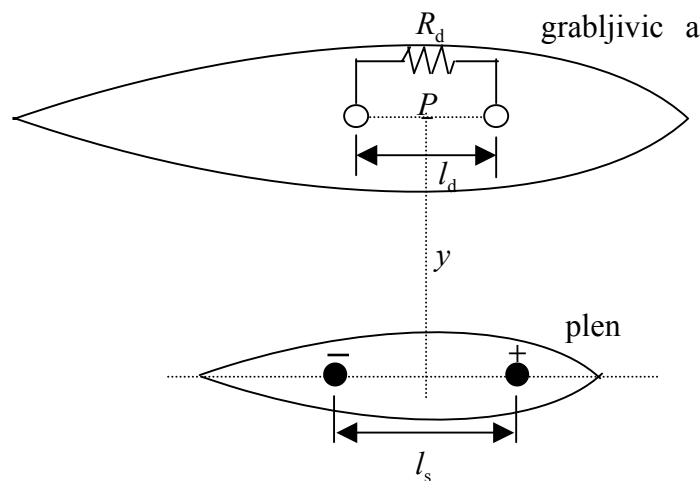
Grafik zavisnosti vremena t od položaja ROPO-a x , $t_{\min} = 100$ ns.

Izvedite jednačinu zavisnosti vremena t protoklog između emitovanja i detektovanja signala od položaja ROPO-a x i odredite dubinu d . **[3.5 poena]**

II. Osetljivost na električne signale

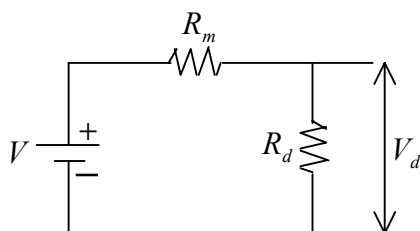
Neke morske životinje imaju sposobnost detektovanja drugih bića na nekom rastojanju zahvaljujući električnim strujama koje ta bića proizvode tokom disanja ili drugih procesa koji uključuju mišićne kontrakcije. Neke grabljivice koriste ove električne signale da bi localirale plen, čak i kada je on skriven u pesku.

Fizički mehanizam generisanja električne struje od strane plena i njenog detektovanja od strane grabljivice može biti modeliran kao na slici II-1. Struja generisana od strane plena teče između dve sfere sa pozitivnim i negativnim potencijalom u telu plena. Rastojanje između centara ove dve sfere je l_s , a svaka od sfera ima poluprečnik r_s , koji je mnogo manji od l_s . Specifična otpornost morske vode je ρ . Pretpostavite da je specifična otpornost tela plena ista kao specifična otpornost morske vode, tako da se postojanje granične površine na slici može zanemariti.



Slika II-1. Model koji opisuje detektovanje električne struje koja dolazi od plena do grabljivice.

Da bismo opisali kako grabljivica detektuje električnu struju generisanu od strane plena, detektor ćemo modelirati na sličan način, sa dve sfere u telu grabljivice koje su u kontaktu sa morskom vodom i leže na pravcu paralelnom sa pravcem na kome leže sfere u telu plena. Centri sfera u telu grabljivice se nalaze na rastojanju l_d , svaka sfera ima poluprečnik r_d , koji je mnogo manji od l_d . Centar detektora nalazi se na rastojanju y iznad izvora struje, a prava na kojoj leže sfere paralelna je sa električnim poljem u centru detektora. Oba rastojanja l_s i l_d su mnogo manja od y . Pretpostavite da je jačina električnog polja konstantna duž linije koja spaja centre sfera. Prema tome, detektor u telu grabljivice, izvor struje u telu plena i okolna morska voda čine zatvoreno strujno kolo prikazano na slici II-2.



Slika II-2. Shema ekvivalentnog zatvorenog strujnog kola koje se sastoji od grabljivice, plena i okolne morske vode.

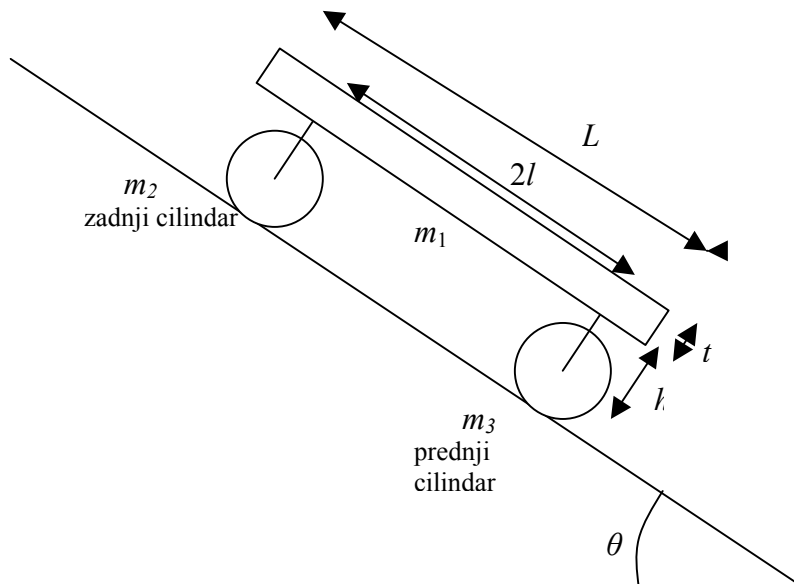
Na ovoj slici, V je razlika potencijala između sfera detektora koja potiče od električnog polja koje generiše struja u telu plena, R_m je unutrašnji otpor koji potiče od morske vode, dok su V_d i R_d redom razlika potencijala i otpornost između sfera detektora u telu grabljivice.

Pitanja:

1. Odredite zavisnost vektora gustine struje \vec{j} (jačine struje po jedinici površine), koju proizvodi tačkasti izvor struje jačine I_s , od rastojanju r od izvora u beskonačnoj sredini. [1.5 poen]

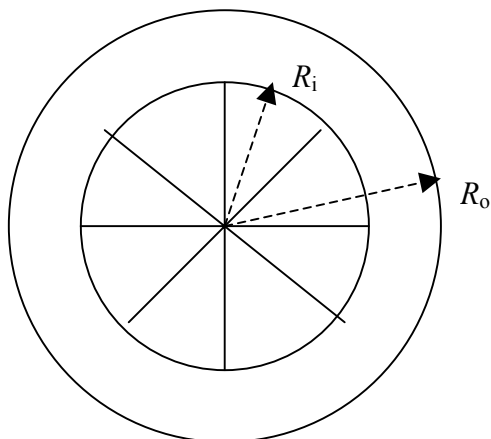
2. Za datu jačinu struje I_s koja teče između sfera u telu plena, koristeći jednačinu $\vec{E} = \rho \vec{j}$, odredite vektor jačine električnog polja \vec{E}_p u centru detektora (u tački P). **[2.0 poena]**
3. Za istu vrednost jačine struje I_s koja teče između sfera u telu plena odredite razliku potencijala između tih sfera V_s . **[1.5 poen]** Odredite otpornost između sfera u telu plena R_s **[0.5 poena]** i električnu snagu koju razvija izvor u plenu P_s . **[0.5 poena]**
4. Odredite otpor sredine između dve sfere detektora u telu grabljivice R_m **[0.5 poena]**, razliku potencijala između ovih sfera V_d **[1.0 poen]**, kao i električnu snagu prenetu sa izvora na detektor P_d . **[0.5 poena]**
5. Odredite optimalnu vrednost otpornosti R_d pri kojoj je detektovana snaga maksimalna **[1.5 poena]**, kao i vrednost te maksimalne snage. **[0.5 poena]**

III. Kretanje masivnih kolica niz strmu ravan



Slika III-1. Jednostavan model masivnih kolica koja se kreću niz strmu ravan.

Na gornjoj slici je prikazan jednostavan model masivnih kolica (rolera), koja imaju po jedan prednji i jedan zadnji točak u obliku šupljeg cilindra, i koja se kreću niz strmu ravan nagibnog ugla θ . Svaki od cilindara ima ukupnu masu M ($m_2 = m_3 = M$), spoljašnji poluprečnik R_o , unutrašnji poluprečnik $R_i = 0.8 R_o$ i osam paoka (prečke koje radijalno spajaju osovinu sa omotačem) ukupne mase $0.2M$. Masa poluga koje spajaju telo kolica sa točkovima je zanemarljiva. Šuplji cilindri se mogu modelirati kao na slici III-2. Kolica se kreću niz strmu ravan pod uticajem gravitacionih sila i sila trenja. Prednji i zadnji cilindar su postavljeni simetrično u odnosu na telo kolica.



Slika III-2. Jednostavan model cilindričnih točkova.

Statički i dinamički koeficijent trenja između cilindra i strme ravni su redom μ_s i μ_k . Telo kolica ima masu $5M$, dužinu L i debljinu t . Rastojanje između centara prednjeg i zadnjeg cilindra je $2l$, dok rastojanja između centara cilindra i donje strane tela kolica iznose h . Pretpostavite da je trenje u osovinama točkova zanemarljivo.

Pitanja:

1. Odredite moment inercije svakog od cilindra. **[1.5 poen]**
2. Nacrtajte shematski sve sile koje deluju na telo kolica, prednji i zadnji cilindar. Napišite jednačine kretanja za navedene delove kolica. **[2.5 poena]**
3. Pretpostavljajući da kolica u početnom trenutku miruju i da se nakon toga kreću samo pod uticajem gravitacionih sila i sila trenja, navedite sve moguće tipove kretanja kolica i odredite odgovarajuća ubrzanja za svaki od tipova kretanja u funkciji od datih fizičkih veličina. **[4.0 poena]**
4. Nakon što kolica krenu iz mirovanja i pređu rastojanje d uz kotrljanje oba točka, nailaze na deo strme ravni na kome su koeficijenti trenja manji i iznose μ_s' i μ_k' . Pri ovim vrednostima koeficijenata trenja oba točka počinju da proklizavaju. Odredite linijsku i ugaonu brzinu svakog od cilindra u trenutku kada su kolica prešla ukupno rastojanje s od početka kretanja. Smatrajte da su rastojanja d i s mnogo veća od dimenzija kolica. **[2.0 poena]**