Теоријски задатак 2

Пиезоелектрични кристални резонатор прикључен на наизменични напон

Размотрите хомогени штап чија дужина износи ℓ, када на њега не делује никаква сила затезања и чији попречни пресек износи A (слика 2а). Дужина штапа се промени за $\Delta\ell$ када нормално на његове крајеве делују силе супротног смера, али истог правца и интензитета F. Затезање T на крајевима штапа дефинисано је са F/A. Релативну промену дужине штапа $\Delta\ell/\ell$ означићемо са S. Користећи уведене ознаке, Хуков закон може да се напише у облику

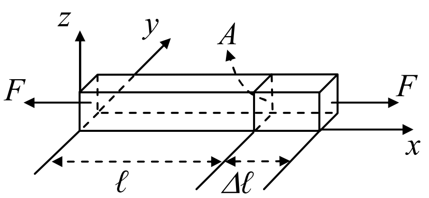
$$T = Y\,S\,, \quad \text{или} \quad \frac{F}{A} = Y\frac{\Delta\ell}{\ell}\,, \tag{1}$$

где је Y Јангов модул еластичности за материјал од кога је направљен штап. Уочите да је затезање T приликом развлачења штапа једнако притиску p који се јавља унутар штапа, док је приликом сабијања штапа по дефиницији $F < 0$ јер се дужина штапа смањује ($\Delta\ell < 0$). Дакле, затезање је приликом сабијања негативно и повезано са притиском p помоћу једнакости $T = -p$.

За хомогени штап густине ρ, брзина простирања лонгитудионалних таласа (брзина звука) дуж штапа дата је са

$$u = \sqrt{Y/\rho}\,. \tag{2}$$

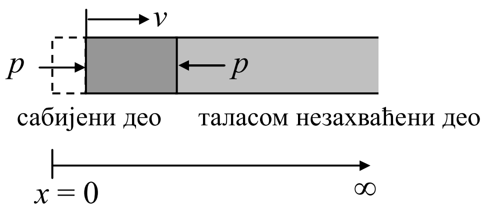
Слика 2а



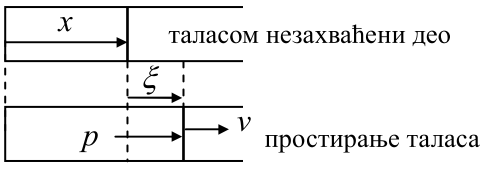
Ефекти пригушења и губитка енергије (дисипације) могу да се занемаре приликом решавања овог задатка.

Део А: Механичке особине

Хомогени полубесконачни штап густине ρ простире се од $x = 0$ до ∞ (слика 2б). У почетном тренутку штап мирује и на њега не вршимо никакав притисак. Након тога помоћу клипа почињемо да вршимо константан мали притисак p на леву страну штапа у тачки $x = 0$ у току веома кратког временског интервала Δt, што изазива појаву таласа који се креће брзином интензитета u дуж штапа на десно.



Слика 2б



Слика 2в

(а) Ако због деловања клипа штап почне да се креће константном брзином интензитета v (слика 2б), изразите релативну промену дужине штапа S и притисак p на левој страни штапа у току временског интервала Δt користећи само величине ρ, u, и v. [1.6 бодова]

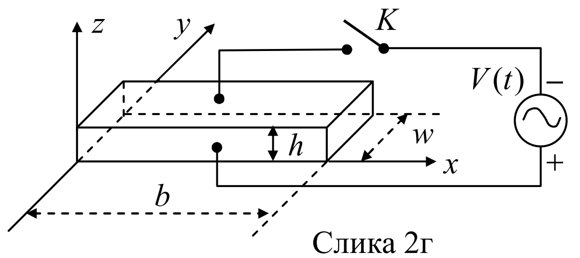
(b) Размотримо сада лонгитудинални талас који се креће у правцу x-осе у штапу. За попречни пресек штапа који се налази у тачки x пре него што талас стигне до њега (слика 2в), означимо са $\xi(x,\ t)$ његову удаљеност од тачке x у тренутку t. Пошто посматрани попречни пресек осцилује, важи

$$\xi(x,\ t) = \xi_0 \sin k(x - u\,t)\,, \tag{3}$$

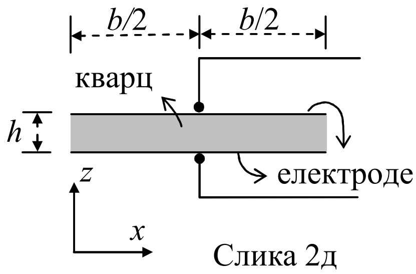
где су ξ_0 и k константе. Одредите брзину пресека $v(x,\ t)$, релативну промену дужине $S(x,\ t)$ и притисак $p(x,\ t)$ у тачки x у функцији од x и t. [2.4 бода]

Део Б: Електромеханичке особине (укључујући пиезоелектрични ефекат)

Размотримо сада кварцну плочицу дужине b, висине h и ширине w (слика 2г). На горњој и доњој површини плочице налазе се танке металне облоге (електроде). Проводне жице, које уједно служе и за придржавање плочице (слика 2д) су причвршћене за центре електрода, за које можемо сматрати да се не померају приликом лонгитудиналних осцилација у плочици дуж x-осе.



Слика 2г



Слика 2д

Густина плочице је ρ = 2.65×10^3 kg/m^3, а Јангов модул Y = 7.87×10^{10} N/m^2. Дужина плочице износи b = 1.00 cm, а ширина w и висина h задовољавају услове $h \ll w$ и $w \ll b$. Док је прекидач K отворен, претпостављамо да се јављају само лонгитудинални стојећи таласи (моде) дуж x-осе у плочици.

За лонгитудинални стојећи талас фреквенције $f = \omega / 2\pi$, удаљеност $\xi(x,\ t)$ посматраног попречног пресека плочице (чији је равнотежни положај x) у тренутку t може да се напише као

$$\xi(x,\ t) = 2\xi_0\, g(x) \cos \omega t\,, \qquad (0 \le x \le b) \tag{4a}$$

где је ξ_0 позитивна константа, а функција $g(x)$ има облик

$$g(x) = B_1 \sin k\left(x - \frac{b}{2}\right) + B_2 \cos k\left(x - \frac{b}{2}\right). \tag{4b}$$

Функција $g(x)$ има максималну вредност 1, а $k = \omega / u$. Водите рачуна о томе да су центри електрода непокретни и да су лева и десна површина плочице слободне, односно да имају нулто затезање (тј. притисак).

(c) Одредите константе B_1 и B_2 из једначине (4b) за лонгитудинални стојећи талас у кварцној плочици. [1.2 бода]

(d) Нађите две најниже фреквенције лонгитудиналних стојећих таласа који могу да се појаве у плочици. [1.2 бода]

Пиезоелектрични ефекат је особина кристала кварца да се при његовом сабијању или развлачењу генерише електрични напон између крајева кристала, као и обратно, да се кристал сабије или издужи (у зависности од поларитета напона) када на његове крајеве доведемо електрични напон. Дакле, механичке и електричне осцилације могу да се међусобно повежу у кристалу кварца.

Означимо са $-\sigma$ и $+\sigma$ површинске густине наелектрисања на горњој и доњој електроди плочице које се јављају када се плочица налази у електричном пољу интензитета E у позитивном смеру z–осе. Означимо даље релативну промену дужине плочице и затезање у смеру x-осе редом са S и T. Сада се пиезоелектрични ефекат може описати следећим скупом једначина:

$$S = (1/Y)T + d_p E \tag{5a}$$

$$\sigma = d_p T + \varepsilon_T E \tag{5b}$$

где је $1/Y = 1.27\times10^{-11}$ m^2/N еластична попустљивост (инверзна вредност Јанговог модула) при константном електричном пољу, $\varepsilon_T = 4.06\times10^{-11}$ F/m је пропустљивост при констнтном притиску, док се $d_p = 2.25\times10^{-12}$ m/V зове пиезоелектрични коефицијент.

Нека је сада прекидач K на слици 2г затворен. Наизменични напон $V(t) = V_m \cos \omega t$ генерише унутар кварцне плочице хомогено електрично поље интензитета $E(t) = V(t)/h$ у правцу z-осе. Када се достигне равнотежно стање, у плочици се јављају лонгитудинални стојећи таласи угаоне фреквенцције ω у правцу x-осе.

Пошто је електрично поље хомогено, таласна дужина λ и фреквенција f лонгитудиналних стојећих таласа у плочици и даље су повезани изразом $\lambda = u/f$, где је u дато једначином (2). Али, као што показује једначина (5a), израз $T = YS$ више не важи, иако се дефиниције релативне промене дужине и затезања нису промениле, а крајеви плочице су остали слободни.

(e) Користећи једначине (5a) и (5b), површинска густина наелектрисања σ на доњој електроди као функција од x и t може да се напише у облику

$$\sigma(x,t) = \left[D_1 \cos k\left(x - \frac{b}{2}\right) + D_2\right]\frac{V(t)}{h} ,$$

где је $k = \omega/u$. Нађите константе D_1 и D_2. [2.2 бода]

(f) Укупно наекетрисањње на површини доње електроде $Q(t)$ повезано је са $V(t)$ релацијом

$$Q(t) = [1 + \alpha^2 (\frac{2}{kb}\tan\frac{kb}{2} - 1)]C_0\, V(t)\,. \tag{6}$$

Нађите израз за C_0 и израз и нумеричку вредност за α^2. [1.4 бода]

*[**Табела за одговоре**]* *Теоријски задатак 2*

Пиезоелектрични кристални резонатор прикључен на наизменични напон

Сваки одговор дати као аналитички израз, а након тога навести нумеричку вредност и јединицу. На пример: површина круга је $A = \pi r^2 = 1.23\ \mathrm{m}^2$.

(a) S и притисак p на левој страни штапа (помоћу ρ, u, и v):

$S =$
$p =$

(b) Брзина $v(x, t)$, релативна промена дужине $S(x, t)$ и притисак $p(x, t)$:

$v(x, t) =$
$S(x, t) =$
$p(x, t) =$

(c) Вредности B_1 и B_2:

$B_1 =$
$B_2 =$

(d) Две најниже фреквенцијестојећих таласа (израз и нумеричка вредност):

Најнижа
Прва следећа

(e) Изрази за D_1 и D_2:

$D_1 =$
$D_2 =$

(f) Константе α^2 (израз и нумеричка вредност) и C_0 (израз):

$\alpha^2 =$
$C_0 =$