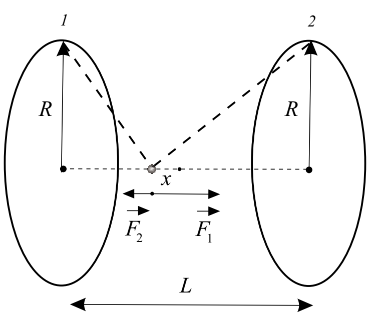
РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА ШКОЛСКЕ 2002/2003. ГОДИНЕ

Београд, 12. април 2003. године

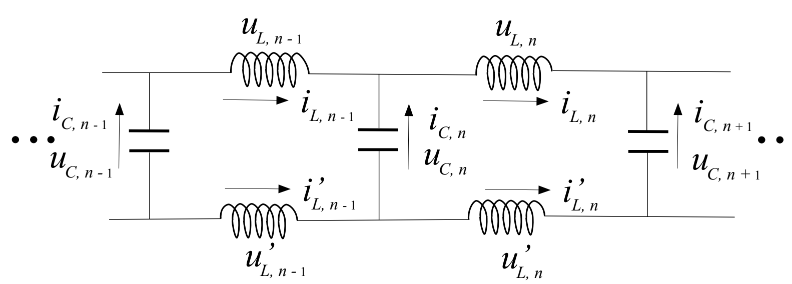
Решења задатака за III разред

1. Колом тече константна струја, па је снага коју даје батерија $P = \mathcal{E}I$, док је брзина промене енергије електричног поља кондензатора $\frac{\Delta E_e}{\Delta t} = \Delta(\frac{Q\mathcal{E}}{2})/\Delta t = \frac{\mathcal{E}}{2}\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \mathcal{E}I/2 = P/2$, јер је напон на кондензатору једнак $\mathcal{E}$. Ове две величине се разликују. Разлика снаге се троши на рад који кондензатор мора да изврши насупрот спољашњем утицају који изазива промену његовог капацитета. Брзина промене капацитета је $\frac{\Delta C}{\Delta t} = \Delta(\frac{Q}{\mathcal{E}})/\Delta t = \frac{1}{\mathcal{E}}\frac{\Delta Q}{\Delta t} = I/\mathcal{E}$, односно $\frac{\Delta C}{\Delta t} = 2\,\mu\mathrm{F/s}$.

2. Тело ће хармонијски осциловати ако на њега делује сила чији интензитет има облик $F = kx$ и која је усмерена ка равнотежном положају, па је неопходан услов за осциловање да тело и кружнице имају наелектрисања истог знака. Због симетрије, на тело изведено из равнотежног положаја кружнице делују Кулоновим силама интензитета F_1 и F_2 (слика 1), где је $F_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\,Q}{(L/2-x)^2+R^2}\cos\alpha$, док је $F_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\,Q}{(L/2+x)^2+R^2}\cos\beta$ и $Q = 2R\pi\lambda$. Сила која делује ка равнотежном положају тела има интензитет $F = F_1 - F_2$, па ако се искористи $\cos\alpha = \frac{L/2-x}{\sqrt{(L/2-x)^2+R^2}}$, $\cos\beta = \frac{L/2+x}{\sqrt{(L/2+x)^2+R^2}}$ и формула $(1+x)^\alpha \approx 1+\alpha x$ (уз занемаривање квадратних чланова по малој величини x), добија се $F = kx$, где је $k = \frac{q\,R\,\lambda}{2\,\varepsilon_0}\,(L^2-2R^2)/[(L/2)^2+R^2]^{5/2}$. Како мора да важи $k>0$, постоји још један услов за хармонијско осциловање, дат са $L > R\sqrt{2}$. Период осцилација је $T = 2\pi\sqrt{m/k}$.



Слика 1

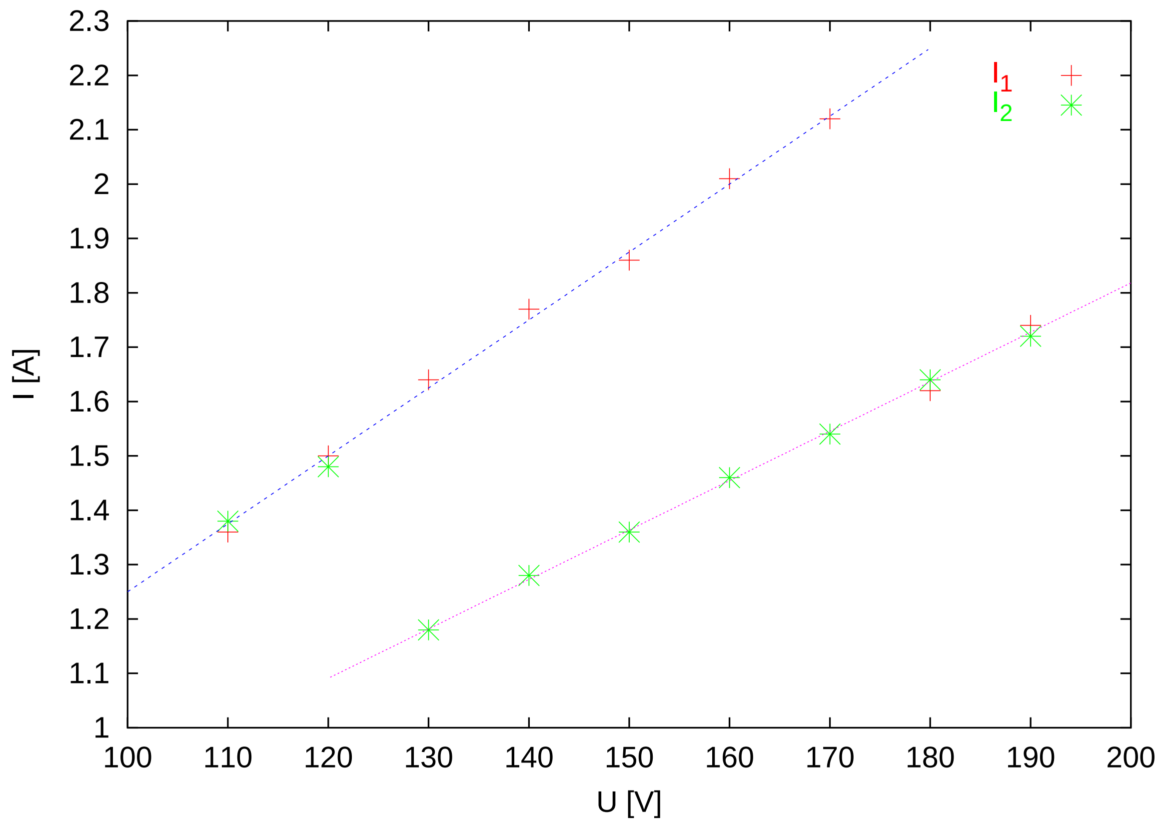


Слика 2

3. Након затварања прекидача P кроз коло тече струја $i(t) = I_0\sin\omega t$. Еквивалентан капацитет кола је $C_e = C/2$, па је сопствена фреквенција $\omega = \sqrt{2/LC}$. Из закона одржања наелектрисања у тренутку t следи $q_0 = q_1(t) + q_2(t)$, а закон одржања енергије је $\frac{1}{2C}q_0^2 = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2C}q_1^2 + \frac{1}{2C}(q_0-q_1)^2$, одакле следи $i^2 = 2q_1(q_0-q_1)/LC$. Максимум леве стране ове једнакости је I_0^2, а десне стране $q_0^2/2LC$, па је $I_0 = q_0/\sqrt{2LC}$. Дакле, струја у колу има облик $i(t) = I_0\sin t\sqrt{2/LC}$. Знајући ово, решавањем једначине $i^2 = 2q_1(q_0-q_1)/LC$ по q_1 добијамо $q_1 = \frac{q_0}{2}\left(1 \pm \sqrt{1-\sin^2 t\sqrt{2/LC}}\right)$. Из почетног услова $q_1(0) = q_0$ следи $q_1(t) = \frac{q_0}{2}\,(1+\cos t\sqrt{2/LC})$ и $q_2(t) = \frac{q_0}{2}\,(1-\cos t\sqrt{2/LC})$.

4. Уз ознаке са слике 2, I Кирхофово правило је $i_{L,n-1} + i_{C,n} - i_{L,n} = 0$ и $i'_{L,n-1} - i_{C,n} - i'_{L,n} = 0$, а II Кирхофово правило је $u_{C,n-1} + u_{L,n-1} - u_{C,n} - u'_{L,n-1} = 0$. Како је $u_{C,n} = U_0\sin(\omega t + n\varphi)$, следи $j_{C,n} = \omega C\,u_{C,n} = \omega C U_0\sin(\omega t + n\varphi)$ (са j је означена одговарајућа струја померена за $\pi/2$ уназад за кондензатор, а за $\pi/2$ унапред за калем), одакле је $i_{C,n} = \omega C U_0\cos(\omega t + n\varphi)$. Слично, важи $j_{L,n} = u_{L,n}/\omega L$ и $j'_{L,n} = u'_{L,n}/\omega L$, па је $j_{L,n-1} - j'_{L,n-1} = (u_{L,n-1} - u'_{L,n-1})/\omega L = (u_{C,n} - u_{C,n-1})/\omega L$, где је искоришћено II Кирхофово правило. Ако се примени дата формула за разлику синуса, добија се $j_{L,n-1} - j'_{L,n-1} = \frac{2U_0}{\omega L}\cos(\omega t + n\varphi - \frac{\varphi}{2})\sin\frac{\varphi}{2}$, па је $i_{L,n-1} - i'_{L,n-1} = \frac{2U_0}{\omega L}\sin(\omega t + n\varphi - \frac{\varphi}{2})\sin\frac{\varphi}{2}$. Ако се одузму једначине I Кирхофовог правила следи $i_{L,n-1} - i'_{L,n-1} + 2i_{C,n} - (i_{L,n} - i'_{L,n}) = 0$, па се након замене претходно добијеног израза за разлику струја и поновне примене формуле за разлику синуса добија $\frac{2U_0}{\omega L}\sin(\omega t + n\varphi - \frac{\varphi}{2})\sin\frac{\varphi}{2} + 2\omega C U_0\cos(\omega t + n\varphi) - \frac{2U_0}{\omega L}\sin(\omega t + n\varphi + \frac{\varphi}{2})\sin\frac{\varphi}{2} = 2\omega C U_0\cos(\omega t + n\varphi) - \frac{4U_0}{\omega L}\cos(\omega t + n\varphi)\sin^2\frac{\varphi}{2} = 0$, одакле је $\omega^2 = 2\sin^2\frac{\varphi}{2}/LC$, односно $\omega = \sin\frac{\varphi}{2}\sqrt{\frac{2}{LC}}$. Како је фазни помак φ у наизменичним величинама унутар суседних ћелија последица коначног времена потребног да талас стигне до следеће ћелије, важи $\omega\Delta t = \varphi$, где је Δt време за које талас пређе пут d, па је интензитет брзине таласа $v = d/\Delta t = \omega d/\varphi$, односно $v = \frac{d}{\varphi}\sin\frac{\varphi}{2}\sqrt{\frac{2}{LC}}$.

5. Тражени графици дати су на слици 3. Види се да је за довољно мале вредности напона магнетно поље мало и да се обе жице налазе у суперпроводном стању. Када се напон повећа, порасте и магнетно поље, па једна од жица (према ознакама из табеле то је друга жица) пређе у нормално стање, што узрокује пад струје у делу уређаја коме она припада. То омогућава првој жици да остане у суперпроводном стању све док напон, струја и магнетно поље у другом делу уређаја не порасту довољно да и она пређе у нормално стање. Горњи скуп тачака на графику одговара правој $I = U/R$ (суперпроводно стање), док доњи скуп тачака одговара правој $I = U/(R+r)$ (нормално стање). Из коефицијента правца ових правих могуће је одредити отпоре R и $R+r$. Ако се на горњој правој одаберу тачке $A(115\text{ V}, 1.43\text{ A})$ и $B(165\text{ V}, 2.06\text{ A})$, тада је $R = \frac{x_B - x_A}{y_B - y_A}$, тј. $R = 79.4\,\Omega$. Релативна грешка је $\Delta R/R = \frac{\Delta x_B + \Delta x_A}{x_B - x_A} + \frac{\Delta y_B + \Delta y_A}{y_B - y_A}$. Како је $\Delta x_A = \Delta x_B = 1\,\text{V}$, а $\Delta y_A = \Delta y_B = 0.01\,\text{A}$, следи $\Delta R/R = 0.072$, одакле је $\Delta R = 5.69\,\Omega \approx 6\,\Omega$, па је $R = (80 \pm 6)\,\Omega$. На исти начин се за доњу праву, за тачке $A(135\text{ V}, 1.23\text{ A})$ и $B(185\text{ V}, 1.68\text{ A})$, добија $R + r = 111.1\,\Omega$, $\Delta(R+r)/(R+r) = 0.084$, $\Delta(R+r) = 9.38\,\Omega \approx 10\,\Omega$, одакле је $R + r = (110 \pm 10)\,\Omega$. Сада је јасно да је $r = (R+r) - R = 30\,\Omega$, а $\Delta r = \Delta(R+r) + \Delta R = 16\,\Omega \approx 20\,\Omega$, па је $r = (30 \pm 20)\,\Omega$. Како је интензитет магнетне индукције унутар калема дат са $B = \mu_0 n I$, а са графика и из табеле се види да се прелаз из суперпроводног у нормално стање дешава за вредност струје између 1.54 A и 1.64 A, следи да је $B_c = \mu_0 n I_c$ и $\Delta B_c = \mu_0 n \Delta I_c$, где је $I_c = (1.54\,\text{A} + 1.64\,\text{A})/2 = 1.59\,\text{A}$, а $\Delta I_c = I_c - 1.54\,\text{A} = 0.05\,\text{A}$. Ако се ово искористи, добија се $B_c = 0.1998\,\text{T}$ и $\Delta B_c = 0.0062\,\text{T} \approx 0.007\,\text{T}$, односно коначно $B_c = (0.200 \pm 0.007)\,\text{T}$.



Слика 3

Задатке припремила: Татјана Тошић
Рецензент: Антун Балаж
Председник комисије: др Мићо Митровић