38. такмичење Заједнице из физике ученика средњих школа

Општа група

Решења

1. ЗАДАТАК – Физика и фудбал

а) Ако у сваком тиму игра по N ирача, а површина терена је A, тада је број играча једног тима по јединици површине

$$n = \frac{N}{A}.$$

Приближна удаљеност до најближег противничког играча износи

$$d = \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Ако се фудбалер креће брзином v, онда је време потребно да се пређе растојање d једнако

$$t = \frac{d}{v},$$

тако да је време којег фудбалер има на располагању за пријем, контролу и предају лопте прилижно

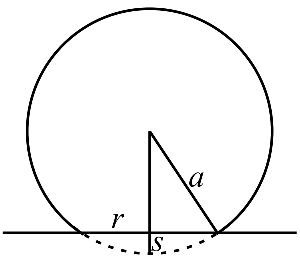
$$t = \frac{1}{2v}\sqrt{\frac{A}{N}} = 2.5\,\mathrm{s}.$$

НАПОМЕНА: Пошто је овај резултат приближан, приликом прегледања задатака признаће се сваки резултат који се од претходног не разликује за фактор већи од $\sqrt{2}$.

б) Резултујућа сила која делује на лопту је

$$F = pS,$$

где је p додатни притисак на унутрашњи зид лопте, а S је површина додира лопте и подлоге. Геометрија деформације приказана је на слици,



a је полупречник лопте, s је дубина деформације, а r је полупречник кружне површине којом лопта додирује подлогу, тако да је

$$r^2 = a^2 - (a-s)^2 = 2as - s^2.$$

Пошто је $s \ll a$, последњи се сабирак може занемарити. Стога је површина додира лопте и подлоге једнака

$$S = \pi r^2 = 2\pi as = Os.$$

Овде је O обим лопте. У току одскока, вертикална брзина центра лопте v је повезана са s на следећи начин

$$v = -\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t},$$

тако да је други Њутнов закон за идеалан одскок лопте

$$m\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -Ops.$$

Решење ове диференцијалне једначине је

$$s(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t),$$

где је $\omega = \sqrt{Op/m}$, док су A и B интеграционе константе које се одређују из почетног услова, да је у тренутку почетка контакта $t = 0$ интензитет вертикалне брзине лопте v_0, тако да се коначно добија да је деформација

$$s = \frac{v_0}{\sqrt{Op/m}}\sin\left(\sqrt{\frac{Op}{m}}t\right),$$

из чега следи да се сила деформације током времена мења по закону

$$F = v_0\sqrt{Opm}\cdot\sin\left(\sqrt{\frac{Op}{m}}t\right).$$

в) На основу ове једначине, следи да је време трајања деформације

$$\tau = \pi\sqrt{\frac{m}{Op}} = 8.4\cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}.$$

г) Вертикална компонента брзине лопте после одбијања одређена је вредношћу реституционог коефицијента

$$v_2 = ev_1,$$

тако да је промена вертикалне компоненте брзине једнака

$$\Delta v = v_2 - (-v_1) = v_2 + v_1 = (1+e)v_1.$$

Када се лопта клиза, на њу делују сила трења, F_{tr}, која успорава лопту а уједно изазива обртни моменат око центра масе лопте $F_{\mathrm{tr}}a$. Сила трења је дата са

$$F_{\mathrm{tr}} = \mu F_{\mathrm{v}},$$

где је F_{v} вертикална сила између лопте и подлоге. Други Њутнов закон је

$$m\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -F_{\mathrm{tr}}; \quad m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F_{\mathrm{v}},$$

тако да је

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} = -\frac{F_{\mathrm{tr}}}{F_{\mathrm{v}}} = -\mu.$$

Интеграција ове једначине даје

$$\Delta u = -\mu\Delta v = -\mu(1+e)v_1,$$

где је $\Delta u = u_2 - u_1$. Момент силе трења доводи до промене момента импулса лопте

$$I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = F_{\mathrm{tr}}a,$$

при чему је $I = \frac{2}{3}ma^2$. Интеграцијом последње једначине добија се да је промена угаоне брзине $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ једнака

$$\Delta\omega = \frac{3}{2}\mu(1+e)\frac{v_1}{a}.$$

Сумирајући претходне резултате, имамо

$$v_2 = ev_1,$$
$$u_2 = u_1 - \mu(1+e)v_1,$$
$$\omega_2 = \omega_1 + \frac{3}{2}\mu(1+e)\frac{v_1}{a}.$$

д) Да би се лопта котрљала, потебно је да буде испуњен услов $u_2/\omega_2 a \leq 1$, што након тривијалних трансформација даје

$$\mu(1+e)v_1 \geq \frac{2}{5}(u_1 - \omega_1 a).$$

За лопту која се не котрља пре одскока $\omega_1 = 0$ последња неједнакост постаје

$$\operatorname{tg}\theta \geq \frac{2}{5\mu(1+e)},$$

где је θ угао између правца кретања лопте и подлоге. За податке дате у задатку је

$$\theta > 20^\circ.$$

ђ) Услов котрљања без клизања даје релацију

$$u_2 = \omega_2 a.$$

Интеграцијом једначина кретања добија се

$$\Delta\omega = -\frac{ma}{I}\Delta u,$$

тако да се добија

$$v_2 = ev_1,$$
$$u_2 = \frac{3}{5}u_1 + \frac{2}{5}\omega_1 a,$$
$$\omega_2 = \frac{2}{5}\omega_1 + \frac{3}{5}\frac{u_1}{a}.$$

е) Вероватноћа да тренутни резултат у тренутку t буде $n_1 : n_2$ једнака је производу вероватноћа да за време t први тим постигне n_1, а други тим n_2 голова (пошто су ти услови у нашем моделу независни)

$$P_{n_1:n_2} = \frac{(r_1 t)^{n_1}(r_2 t)^{n_2}}{n_1! n_2!}e^{-(r_1+r_2)t}.$$

ж) Вероватноћа да ни један тим не постигне гол за време t износи

$$P_{0:0} = e^{-(r_1+r_2)t}.$$

Вероватноћа да тим 1 за време $\mathrm{d}t$ постигне гол је $r_1\mathrm{d}t$, тако да је вероватноћа да нема голова за време t, а да тим 1 постигне погодак у тренутку t је

$$\mathrm{d}P_1 = r_1 e^{-(r_1+r_2)t}\mathrm{d}t.$$

Интеграцијом овог израза од 0 до t добија се да је вероватноћа да тим 1 постигне први гол

$$P_1 = \frac{r_1}{r_1+r_2}(1 - e^{-(r_1+r_2)t}).$$

2. ЗАДАТАК – Физичар детектив

а) Струја из жице истиче униформно по полусфери површине $2\pi r^2$. Густина струје је

$$J = \frac{I}{2\pi r^2}.$$

Интензитет електричног поља повезан је са густином струје преко следеће једначине:

$$E = \rho J,$$

где је ρ отпорност тла. До ове везе може се доћи полазећи од Омовог закона или димензионом анализом. Према томе, имамо

$$E = \frac{I\rho}{2\pi r^2}.$$

б) За $r = 10\,\mathrm{m}$ добија се

$$E = 16\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}.$$

в) Можемо да претпоставимо да је електрично поље на месту где је човек стајао приближно константно, тако да је

$$V = Ed = 8\,\mathrm{V}.$$

г) Ноге и труп човека налазе се у серијској вези, тако да је укупан отпор читавог тела једнак

$$R = 2R_\mathrm{n} + R_\mathrm{t} = 1600\,\Omega.$$

Из Омовог закона следи да је струја која протиче кроз тело

$$i = \frac{V}{R} = 5\,\mathrm{mA}.$$

д) Прорачуната струја је 20 пута мања од минималне струје која изазива фибрилацију, према томе, електрична компанија није крива за смрт унесрећеног.

ђ) Ако са a обележимо полупречник жице, тада је разлика потенцијала између тачке на растојању r од центра жице и тачке на површини жице једнака

$$V(r) = -\int_a^r \frac{I\rho}{2\pi r^2}\mathrm{d}r = \frac{I\rho}{2\pi}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

То ћемо звати потенцијалом на растојању r од центра жице. Приметимо да је други сабирак константан, тако да га можемо одбацити, па је потенцијал

$$V(r) = \frac{I\rho}{2\pi}\frac{1}{r}.$$

е) Ако је једна нога на растојању r а друга на растојању $r - l$, тада је човек на потенцијалу

$$\Delta V = V(r) - V(r-l) = \frac{I\rho}{2\pi}\frac{l}{r(r-l)},$$

тако да кроз тело пролази струја

$$i = \frac{\Delta V}{R} = \frac{I\rho}{2\pi R}\frac{l}{r(r-l)}.$$

Ако се последњи израз напише као квадратна једначина по полупречнику r

$$r^2 - rl - \frac{I\rho}{2\pi i R} = 0,$$

а потом се та једначина реши

$$r = \frac{1}{2}\left(l + \sqrt{l^2 + \frac{2I\rho}{\pi i R}}\right),$$

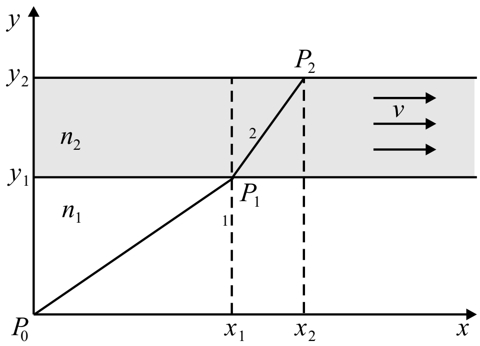
видимо да $r \uparrow$ када $l \uparrow$ и $i \downarrow$. Стога ћемо максималну вредност за пречник зоне опасности добити када је $l = L$ i $i = i_{\min}$

$$D = L + \sqrt{L^2 + \frac{2IL\rho}{\pi i_{\min} R}} = 9.4\,\mathrm{m}.$$

Дакле на знаковима опасности трена нагласити да је забрањено прилажење евентуално присутним жицама на растојање од 4.7 m.

3. ЗАДАТАК – Преламање светлости између средина у релативном кретању

а) Нека је координатни систем изабран као на слици.



На основу Фермаовог принципа, светлост ће путовати из тачке P_0 до тачке P_2 бирајући онај пут на којем је укупно време најкраће. Јасно је да време путовања сигнала зависи од положаја тачке P_1 у којој долази до преламања. Тај положај је одређен координатом x_1. У xyt координатном систему (у којем средина 1 мирује), светлост прелази пут P_0P_1 за време

$$t_1 - t_0 = \frac{n_1}{c}\sqrt{x_1^2 + y_1^2}.$$

С друге стране, за пут од P_1 до P_2 потребно је да знамо како се светлост креће у координатном систему $x'y't'$ у којем средина 2 мирује. Уколико дефинишемо

$$\Delta x = x_2 - x_1,$$

$$\Delta y = y_2 - y_1,$$

$$\Delta t = t_2 - t_1,$$

тада Лоренцове трансформације дају да су одговарајући прираштаји у примованим координатама

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$$\Delta y' = \Delta y,$$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

Пошто је

$$\Delta t' = \frac{n_2}{c}\sqrt{\Delta x'^2 + \Delta y'^2},$$

веза између Δt и Δx је

$$\frac{c^2}{n_2^2}\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\right)^2 = (\Delta x - v\Delta t)^2 + \Delta y^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right).$$

Ова веза даје квадратну једначину по Δt, чијим решавањем се добија да је

$$\Delta t = \frac{\frac{v(1-n_2^2)\Delta x}{c^2}}{1 - n_2^2\frac{v^2}{c^2}} \pm$$

$$\pm \frac{\frac{n_2}{c}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\sqrt{(1 - \frac{v^2}{c^2})\Delta x^2 + (1 - n_2^2\frac{v^2}{c^2})\Delta y^2}}{1 - n_2^2\frac{v^2}{c^2}}.$$

Пошто је $\Delta t > 0$, у горњој једначини бирамо знак $+$. Време путовања светлости је

$$T = t_2 - t_0 = \Delta t + \frac{n_1}{c}\sqrt{x_1^2 + y_1^2}.$$

Из услова

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x_1} = 0,$$

добија се релација

$$(1 - n_2\frac{v^2}{c^2})n_1\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} - \frac{v}{c}(1 - n_2^2) -$$

$$-\frac{n_2(1 - \frac{v^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}\Delta x}{\sqrt{(1 - \frac{v^2}{c^2})\Delta x^2 + (1 - n_2^2\frac{v^2}{c^2})\Delta y^2}} = 0.$$

Након извршених смена

$$\sin\theta_1 = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}},$$

$$\sin\theta_2 = \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}},$$

$$\cos\theta_2 = \frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}},$$

релација постаје слична Снеловом закону. Коначно, када се изврше тривијална поједностављења, уопштена форма Снеловог закона постаје

$$n_1\sin\theta_1\left(1 - n_2\frac{v^2}{c^2}\right) - \frac{v}{c}(1 - n_2^2) =$$

$$= n_2\sin\theta_2\frac{(1 - \frac{v^2}{c^2})}{\sqrt{1 - \frac{1-n_2^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}\frac{v^2}{c^2}\cos^2\theta_2}}.$$

б) Као што се и очекује, горња релација се своди на Снелов закон ако се узме да средине релативно мирују $v = 0$. Међутим, ако је покретна средина вакуум ($n_2 = 1$), тада се горња једначина опет своди на Снелов закон, независно од тога колика је релативна брзина v. Разлог ове појаве лежи у чињеници да *не види* кретање вакуума.

РЕШЕЊЕ ЕКСПЕРИМЕНТАЛНОГ ЗАДАТКА ЗА III и IV РАЗРЕД

1.Референтни потенцијал доведен на + компаратора, а потенцијал са клизача потенциометра на -. Гашењеи паљење лед диоде на 20 подеоку показује да је вредност подеока на потенциометру: 5V:20=0.25V

Процењена грешка одређивања положаја клизача је 0.2 подеока, односно грешка вредности подеока износи 0.05V, па је вредност подеока:

1 подеок = (0.25±0.05) V .

2. Напон на кондензатору се мења са временом

$$U = \frac{q}{C} = \frac{I}{C}t$$

Пошто је струја константна, напон на кондензатору линеарно расте са временом пуњења. Мерено је време за које струјни извор напуни кондензатор до напона на потенциометру. Изједначавање ових напона је У табели су дати резултати мерења зависности тогконстатовано светлењем лед диоде на компаратору.

У табели су дати резултати мерења, где је напон на кондензатору изражен преко броја подеока на потенциометру.

	$t_i[\mathrm{s}]$	$U[\mathrm{pod}]$	$\Delta t[\mathrm{s}]$	$t_S[\mathrm{s}]$
1	26.00 25.97 26.00	3	0.02 0.02	25.99
2	50.50 50.75 50.78	6	0.18 0.18	50.677 50.68
3	74.41 74.41 74.38	9	0.02 0.02	74.40
4	100.53 100.35 100.75	12	0.21 0.2	100.54 100.5
5	127.25 127.40 127.62	15	0.2 0.2	127.42 127.4
6	153.90 152.84 153.28	18	0.56 0.6	153.34 153.3

Нацртан је график линеарне зависности времена пуњења конденsатора до одређеног напона од тог напона.

Избором две неексперименталне тачке са праве, нпр. $\mathrm{A}(4.5\,\mathrm{pod}, 38\,\mathrm{s})$ и $\mathrm{B}(16\,\mathrm{pod}, 135\,\mathrm{s})$, налази се коеф. правца као:

$$a = \frac{t_\mathrm{B} - t_\mathrm{A}}{U_\mathrm{B} - U_\mathrm{A}} = \frac{(135-38)\mathrm{s}}{(16\text{ - }4.5)\mathrm{pod}} = 8.44\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{pod}}$$

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta t_\mathrm{B} + \Delta t_\mathrm{A}}{t_\mathrm{B} - t_\mathrm{A}} + \frac{\Delta U_\mathrm{B} + \Delta U_\mathrm{A}}{U_\mathrm{B} - U_\mathrm{A}} = \frac{(1+1)\mathrm{s}}{(135-38)\mathrm{s}} + \frac{(0.2+0.2)\mathrm{pod}}{(16-4.5)\mathrm{pod}}\ .$$

$$\frac{\Delta a}{a} = 0.056 \ \Rightarrow\ \Delta a = 0.47\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{pod}} \approx 0.5\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{pod}} \qquad \Rightarrow\ a = (8.4 \pm 0.5)\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{pod}}\ .$$

Пошто је $U = \frac{I}{C}t \ \Rightarrow\ t = \frac{C}{I}U \ \Rightarrow\ a = \frac{C}{I} \ \Rightarrow\ I = \frac{C}{a}$.

$I = \dfrac{470\mu\text{F}}{8.44\dfrac{\text{s}}{\text{pod}}} = 55.69\dfrac{\mu\text{Fpod}}{\text{s}} = 13.92\cdot10^{-6}\,\text{A}$, а релативна грешка $\dfrac{\Delta I}{I} = \dfrac{\Delta a}{a}$,

$\Delta I = 0.056\cdot 13.92\mu\text{A} = 0.78\mu\text{A} \approx 0.8\mu\text{A}$,

$$\Rightarrow \; I = (13.9 \pm 0.8)\mu\text{A} .$$

3. Претходни поступак је поновљен са кондензатором чији капацитет треба одредити. Резултати мерења су дати у табели.

	$t_i[\text{s}]$	$U[\text{pod}]$	$\Delta t[\text{s}]$	$t_S[\text{s}]$
1	11.22	3	0.02	11.24
	11.25		0.02	11.24
	11.25			
2	21.94	6	0.103	22.043
	22.07		0.1	22.0
	22.12			
3	33.04	9	0.037	33.077
	33.10		0.04	33.08
	33.09			
4	33.04	12	0.167	44.257
	33.10		0.17	44.26
	33.09			
5	55.61	15	0.69	56.30
	56.28		0.7	56.3
	56.00			
6	67.57	18	0.54	68.11
	68.53		0.6	68.1
	68.22			

Нацртан је график линеарне зависности времена пуњења кондензатора до одређеног напона од тог напона.

Избором две неексперименталне тачке са праве, нпр. $\text{A}(5\,\text{pod}, 10.85\text{s})$ и $\text{B}(17\,\text{pod}, 60.35\,\text{s})$, налази се коеф. правца као:

$$a = \frac{t_\text{B} - t_\text{A}}{U_\text{B} - U_\text{A}} = \frac{(60.35 - 10.85)\text{s}}{(17 - 5)\text{pod}} = 4.12\frac{\text{s}}{\text{pod}}$$

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta t_\text{B} + \Delta t_\text{A}}{t_\text{B} - t_\text{A}} + \frac{\Delta U_\text{B} + \Delta U_\text{A}}{U_\text{B} - U_\text{A}} = \frac{(0.5 + 0.5)\text{s}}{(60.35 - 10.85)\text{s}} + \frac{(0.2 + 0.2)\text{pod}}{(17 - 5)\text{pod}} .$$

$$\frac{\Delta a}{a} = 0.054 \;\Rightarrow\; \Delta a = 0.23\frac{\text{s}}{\text{pod}} \approx 0.3\frac{\text{s}}{\text{pod}} \qquad \Rightarrow \quad a = (4.1 \pm 0.3)\frac{\text{s}}{\text{pod}} .$$

Пошто је $a = \dfrac{C}{I} \;\Rightarrow\; C = Ia = 13.92\mu\text{A}\cdot 4.12\dfrac{\text{s}}{\text{pod}} = 229.7\mu\text{F}$,

$\Delta C = C\left(\dfrac{\Delta a}{a} + \dfrac{\Delta I}{I}\right) = 21.2\mu\text{F} \approx 30\mu\text{F}$,

$$\Rightarrow \; C = (230 \pm 30)\mu\text{F} .$$