Решења са 35. Међународне олимпијаде из физике – Поханг, Кореја

Теоријски задатак 1: "Пинг - понг" отпорник

а) [1.2 поена] Јачина електричног поља којом једна плоча делује на другу је

$$E' = \frac{1}{2}E = \frac{V}{2d},$$

па је сила којом једна плоча привлачи другу

$$F = QE' = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \pi R^2 \frac{V^2}{d^2}.$$

б) [0.8 поена] Примењујући Гаусову теорему на горњу површину малог диска добијамо

$$\frac{q}{r^2\pi} = -\varepsilon_0 2E'$$

одакле следи

$$\chi = -\varepsilon_0 \frac{\pi r^2}{d}.$$

в) [0.5 поена] Да би се диск подигао потребно је да електрична сила која делује на њега буде већа по интензитету од гравитационе. Граничан напон одређен је условом $F_{\mathrm{g}} = F_{\mathrm{e}}$ тако да, користећи резултат под а), добијамо

$$F_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{\pi r^2}{d^2} V^2 = mg.$$

Након сређивања и замене израза за χ добија се да је

$$V_{\mathrm{th}} = \sqrt{\frac{2mgd}{\chi}}.$$

г) [2.3 поена] Нека је v_n брзина диска након n-тог судара са доњом плочом. Кинетичка енергија у том тренутку је

$$K_n = \frac{1}{2}mv_n^2.$$

Пре судара са горњом плочом кинетичка енергија је

$$K_{n-\mathrm{gore}} = \frac{1}{2}mv_{n-\mathrm{gore}}^2 = K_n + qV - mgd$$

да би одмах после судара енергија била

$$K'_{n-\mathrm{gore}} = \eta^2 K_{n-\mathrm{gore}}.$$

Сличним разматрањем добија се да је кинетичка енергија након $(n+1)$-ог судара са доњом плочом

$$K_{n+1} = \eta^2(K'_{n-\mathrm{gore}} + qV + mgd).$$

Ако $n \to \infty$ тада K_n и K_{n+1} теже ка граничној вредности $K_{\mathrm{s}} = \frac{1}{2}mv_{\mathrm{s}}^2$. Заменом се добија

$$K_{\mathrm{s}} = \frac{\eta^2}{1-\eta^4} \cdot [(1+\eta^2)qV + (1-\eta^2)mgd]$$

односно

$$v_{\mathrm{s}} = \sqrt{\frac{2\chi V^2}{m}\frac{\eta^2}{1-\eta^2} + 2gd\frac{\eta^2}{1+\eta^2}}.$$

Поређењем са $v_{\mathrm{s}} = \sqrt{\alpha V^2 + \beta}$ читамо коефицијенте α и β:

$$\alpha = \frac{2\chi}{m}\frac{\eta^2}{1-\eta^2}, \quad \beta = 2gd\frac{\eta^2}{1+\eta^2}.$$

д) [2.2 поена] Количина наелектрисања коју диск пренесе током једног периода је $\Delta Q = 2q$, а временски интервал је

$$\Delta t = t_+ + t_-$$

где је $t_+(t_-)$ време кретања диска на горе (доле). Како је

$$v_{0+}t_+ + \frac{1}{2}a_+t_+^2 = d$$

и

$$v_{0-}t_- + \frac{1}{2}a_-t_-^2 = d$$

где су $v_{0+}(v_{0-})$ почетна брзина на доњој (горњој) плочи, а $a_+(a_-)$ убрзање на горе (доле), сила која делује на диск је

$$F = ma_\pm = qE \mp mg = \frac{qV}{d} \mp mg.$$

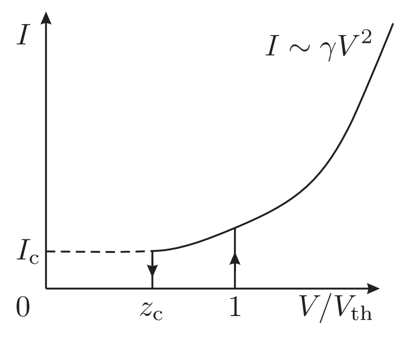
Користећи апроксимацију $mgd \ll qV$, $a_\pm$ се може проценити са $a_0 = a_+ = a_- \approx \frac{qV}{md}$ одакле закључујемо да су кретања на горе и на доле симетрична. Следи $t_0 = t_+ = t_-$, $v_{\mathrm{s}} = v_{0+} = v_{0-}$ и $a_0 = a_+ = a_-$. Изједначавајући брзине после судара добија се

$$v_s = \eta(v_{\mathrm{s}} + a_0 t_0)$$

односно
$$\Delta t = 2t_0 = 2\frac{1-\eta}{\eta}\frac{v_\mathrm{s}}{a_0}.$$
Како је $mgd \ll qV$ важи
$$K_\mathrm{s} = \frac{1}{2}mv_\mathrm{s}^2 \approx \frac{\eta^2}{1-\eta^2}qV.$$
Враћајући назад у претходне једначине добија се
$$\Delta t = 2\,\sqrt{\frac{1-\eta}{1+\eta}}\,\sqrt{\frac{2md^2}{\chi V^2}}$$
одакле се види да је струја
$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{2q}{\Delta t} = \sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}}\,\sqrt{\frac{\chi^3}{2md^2}}\,V^2,$$
из чега се чита
$$\gamma = \sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}\cdot\frac{\chi^3}{2md^2}}.$$

ђ) [3 поена] Критични напон V_c одређујемо из услова да је брзина диска на горњој плочи $v_{0-} = 0$ односно преко закона одржања енергије
$$K_\mathrm{s} + qV_c - mgd = 0.$$
Одатле следи
$$(\frac{\eta^2}{1-\eta^2})qV_c + (\frac{\eta^2}{1+\eta^2})mgd + qV_c - mgd = 0$$
односно
$$qV_c = \frac{1-\eta^2}{1+\eta^2}mgd.$$
Из релације $q = \chi V_c$ следи
$$V_c = \sqrt{\frac{1-\eta^2}{1+\eta^2}}\sqrt{\frac{mgd}{\chi}}.$$
Поредећи са напоном V_th добија се
$$V_c = z_c V_\mathrm{th},$$
где је
$$z_c = \sqrt{\frac{1-\eta^2}{2(1+\eta^2)}}.$$

Интервал $\Delta t = t_- + t_+$ одређује се из услова
$$v_{0-}t_- + \frac{1}{2}a_-t_-^2 = d,$$
и
$$v_{0+}t_+ + \frac{1}{2}a_+t_+^2 = d,$$
где су убрзања дата са
$$a_+ = \frac{qV_c}{md} - g = \left[\frac{1-\eta^2}{1+\eta^2} - 1\right]g = \left(\frac{-2\eta^2}{1+\eta^2}\right)g$$
и
$$a_- = \frac{qV_c}{md} + g = \left[\frac{1-\eta^2}{1+\eta^2} + 1\right]g = \left(\frac{2}{1+\eta^2}\right)g$$
добија се
$$\frac{a_+}{a_-} = -\eta^2.$$
Како је $v_{0-} = 0$ следи
$$t_- = \sqrt{\frac{2d}{a_-}} = \sqrt{(1+\eta^2)(\frac{d}{g})}.$$
Слично, користећи $v_{0+}^2 = \eta^2(2da_-) = -2da_+$ имамо
$$t_+ = \frac{v_{0+}}{a_+}\left(\sqrt{1+\frac{2da_+}{v_{0+}^2}} - 1\right) = \sqrt{\frac{1+\eta^2}{\eta^2}\cdot\frac{d}{g}} = \frac{t_-}{\eta}$$
и
$$\Delta t = t_- + t_+ = \left(1+\frac{1}{n}\right)\sqrt{(1+\eta^2)\frac{d}{g}}.$$
Коначно струја је
$$I_\mathrm{c} = \frac{\Delta Q_\mathrm{c}}{\Delta t} = \frac{2q}{\Delta t} = \frac{2\chi V_\mathrm{c}}{\Delta t} = \frac{2\eta\sqrt{1-\eta^2}}{(1+\eta)(1+\eta^2)}g\sqrt{m\chi}.$$



Теоријски задатак 2: Подизање балона

а) [1.5 поена] Користећи једначину гасног стања за n молова хелијума на температури T и притиску $P+\Delta P$ добија се запремина

$$V = \frac{nRT}{P+\Delta P}.$$

За околни ваздух важи следеће

$$PV = n_A RT.$$

Сила потиска се рачуна као

$$F_b = \rho_A V g.$$

Користећи још $M_A = \frac{m_A}{n_A} = \frac{\rho_A V}{n_A}$ и замењујући у горње једначине добија се

$$F_b = \rho_A V g = M_A n_A g = M_A \frac{PV}{RT} g = M_A n \frac{P}{P+\Delta P} g.$$

б) [2 поена] Када је густина ваздуха ρ константна тада је разлика притисака услед разлике у висини z дата са $-gz\rho$. Међутим, када је ρ функција висине, важи следеће:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\rho g = -\frac{\rho_0 T_0}{P_0}\frac{P}{T} g$$

где је искоришћено $\rho T/P = \mathrm{const}$ што важи код идеалних гасова. Користећи дату једначину (2.1) и

$$\frac{T}{T_0} = 1 - \frac{z}{z_0}$$

добија се

$$\gamma = \frac{\rho_0 z_0 g}{P_0} = \frac{1.16 \times 4.9 \times 10^4 \times 9.8}{1.01 \times 10^5} = 5.52$$

Тражена нумеричка вредност је 5.5.

в) [2 поена] Рад потребан да се повећа радијус балона од r до $r + \mathrm{d}r$ под разликом притисака ΔP је

$$\mathrm{d}W = 4\pi r^2 \Delta P \mathrm{d}r,$$

док повећање еластичне енергије за исту промену радијуса r износи

$$\mathrm{d}W = \left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\right)\mathrm{d}r = 4\pi kRT\left(4r - 4\frac{r_0^6}{r^5}\right)\mathrm{d}r.$$

Изједначавајући та два израза за $\mathrm{d}W$ добија се

$$\Delta P = 4kRT\left(\frac{1}{r} - \frac{r_0^6}{r^7}\right) = \frac{4kRT}{r_0}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^7}\right).$$

График као функција od $\lambda(>1)$ брзо расте, има максимум за $\lambda = 7^{1/6} = 1.38$, а понаша се као λ^{-1} за велико λ.

г) [1.5 поена] Из закона идеалних гасова важи

$$P_0 V_0 = n_0 R T_0$$

где је V_0 почетна запремина. Примењујући закон гасова за запремину $V = \lambda^3 V_0$ која садржи n молова гаса на температури $T = T_0$ добија се притисак унутар балона

$$P_{\mathrm{in}} = nRT_0/V = \frac{n}{n_0\lambda^3} P_0.$$

С друге стране резултат под в) за $T = T_0$ даје

$$P_{\mathrm{in}} = P_0 + \Delta P = \left(1 + a\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^7}\right)\right) P_0.$$

Изједначавајући последње два једначине добија се

$$a = \frac{\frac{n}{n_0\lambda^3} - 1}{\lambda^{-1} - \lambda^{-7}}.$$

Како је $n/n_0 = 3.6$ и $\lambda = 1.5$ следи $a = 0.110$.

д) [3 поена] Да би балон лебдео на бисини z_f потребно је да буде испуњен услов $F_b = M_T g$, односно користећи решење под а) треба да важи

$$\frac{P}{P+\Delta P} = \frac{M_T}{M_A n}.$$

За n молова хелијума у запремини

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \lambda^3 \frac{4}{3}\pi r_0^3 = \lambda^3 V_0,$$

притиску P и температури T следи

$$(P+\Delta P)\lambda^3 = \frac{nRT}{V_0} = P_0 \frac{T}{T_0}\frac{n}{n_0}.$$

Комбинујући последње једначине добија се равнотежни услов у облику

$$\frac{P}{P_0}\frac{T}{T_0}\lambda^3 = \frac{M_T}{M_a n_0}.$$

Користећи решење под в) добија се

$$P\lambda^3 + \frac{4kRT}{r_0}\lambda^2(1-\lambda^{-6}) = P_0\frac{T}{T_0}\frac{n}{n_0}$$

односно

$$\frac{P}{P_0}\frac{T}{T_0}\lambda^3 = \frac{n}{n_0} - a\lambda^2(1-\lambda^{-6}).$$

Изједначавајући леву и десну страну добија се једначина по

$$\lambda^2(1-\lambda^{-6}) = \frac{1}{an_0}\left(n - \frac{M_T}{M_A}\right) = 4.54.$$

Одатле следи $\lambda^2 \approx 4.54/(1-4.54^{-3}) \approx 4.54 : \lambda_f \cong 2.13$. Да би се нашла висина користи се дата формула под б) у облику

$$\frac{P}{P_0}\frac{T}{T_0}\lambda^3 = (1-\frac{z_f}{z_0})^{\gamma-1}\lambda_f^3 = \frac{M_T}{M_A n_0} = 3.10.$$

Решење последње једначине по z_f, а за $\lambda_f = 2.13$ и $\gamma - 1 = 4.5$ даје

$$z_f = 49\cdot(1-(3.10/2.13^3)^{1/4.5}) = 10.9 \text{ km}.$$

Тражени одговори су $\lambda_f = 2.1$ и $z_f = 11$ km.

Теоријски задатак 3: Атомска микроскопија

а) [1.5 поена] Једначина кретања сонде је класична једначина принудних осцилација са решењима за фазу и амплитуду у облику

$$\mathrm{tg}\phi = \frac{b\omega}{m(\omega_0^2-\omega^2)}$$

и

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2-\omega^2)^2+b^2\omega^2}}.$$

Исто то се могло добити и заменом

$$z(t) = A\sin(\omega t - \phi)$$

у полазну диференцијалну једначину и изједначавања са нулом коефицијената уз временски промењливе чланове. Следи за $\omega = \omega_0$, $A = \frac{F_0}{b\omega_0}$ и $\phi = \frac{\pi}{2}$.

б) [1 поен] Излазни сигнал је

$$V_{i0}\sin(\omega_i t - \phi_i)V_{R0}\sin(\omega t) =$$

$$= \frac{1}{2}V_{i0}V_{R0}[\cos(\omega_i-\omega)t - \phi_i - \cos(\omega_i+\omega)t - \phi_i].$$

Излазни сигнал није једнак нули за $\omega = \omega_i$. У том случају, амплитуда dc сигнала је $\frac{1}{2}V_{i0}V_{R0}\cos\phi$

в) [1.5 поена] Амплитуда улазног сигнала при резонанци је

$$V_{i0} = c_2\frac{F_0}{b\omega_0} = \frac{V_{R0}c_1c_2}{b\omega_0}.$$

Како је фаза улазног сигнала $\pi/2 - \pi/2 = 0$ следи $\phi_i = 0$ и амплитуда излазног сигнала је

$$\frac{1}{2}V_{i0}V_{R0}\cos 0 = \frac{c_1c_2}{2}\frac{V_{R0}^2}{b\omega_0}.$$

г) [2 поена] Како је $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, развијајући последњу једначину у ред добија се

$$\sqrt{\frac{k}{m+\Delta m}} \approx \sqrt{\frac{k}{m}\left(1-\frac{\Delta m}{m}\right)} = \omega_0\left(1-\frac{1}{2}\frac{\Delta m}{m}\right)$$

односно $\Delta\omega_0 = -\frac{1}{2}\omega_0\frac{\Delta m}{m}$. При резонанци, замењујући $\phi \to \frac{\pi}{2} + \Delta\phi$ и $\omega_0 \to \omega_0 + \Delta\omega_0$ у јед. (а3), добија се

$$\tan(\frac{\pi}{2}+\Delta\phi) = -\frac{1}{\tan\Delta\phi} = \frac{b}{2m\Delta\omega_0}.$$

Следи $\Delta\phi \approx \tan\Delta\phi = -\frac{2m\Delta\omega_0}{b}$. Коначно налазимо промену масе

$$\Delta m = \frac{b}{\omega_0}\Delta\phi = \frac{10^3\cdot 10^{-12}\cdot\pi}{10^6\cdot 1800} = 1.7\cdot 10^{-18}.$$