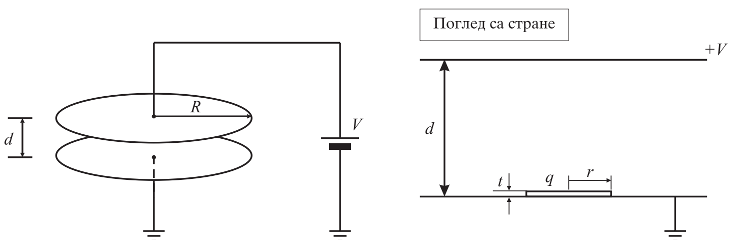
Задаци са 35. Међународне олимпијаде из физике – Поханг, Кореја

Доносимо вам теоријске задатке са овогодишње олимпијаде из физике. Задатке је припремио и превео члан олимпијске екипе Милан Жежељ. Решења ових задатака, као и експериментални задаци са решењима биће објављени у наредним бројевима. Уколико сте нестрпљиви, задатке можете пронаћи и на сајту олимпијаде http://www.ipho2004.or.kr/

Теоријски задатак 1: "Пинг - понг" отпорник

Кондензатор се састоји од две кружне паралелне плоче истих полупречника R које се налазе на међусобном растојању d, при чему је $d \ll R$, као што је приказано на слици 1(a). Горња плоча је повезана са извором константног напона и налази се на потенцијалу V, док је доња плоча уземљена. Затим је танак мали диск масе m, полупречника $r(\ll R, d)$ и дебљине $t(\ll r)$ постављен на средину доње плоче, као што је приказано на слици 1(b). Претпоставимо да је између плоча вакуум диелектричне константе ε_0; да су плоче и диск направљени од савршених проводника; и да се сви електростатички ефекти крајева могу занемарити. Индуктивитет целог кола и релативистички ефекти могу бити занемарени. Такође занемарити индуковање наелектрисања у проводнику, услед приближавања наелектрисаног диска (метод ликова).



(a) (b)

Слика 1: Шема (a) плочастог кондензатора везаног за извор константног напона и (b) поглед са стране на паралелне плоче кондензатора са малим диском убаченим у кондензатор (детаљи су дати у тексту).

а) [1.2 поена] Израчунајте електростатичку силу F_p између плоча које се налазе на растојању d, пре уношења диска између њих, као што је приказано на сл. 1(a).

б) [0.8 поена] Када је диск постављен на доњу плочу, наелектрисање q на диску са сл. 1(б) повезано је са напоном V као $q = \chi V$. Изразити χ преко r, d и ε_0.

в) [0.5 поена] Паралелне плоче леже нормално на униформно гравитационо поље g. За подизање диска, који је на почетку мировао, треба повећати примењени напон изнад граничног напона V_{th}. Наћи V_{th} у зависности од m, g, d и χ.

г) [2.3 поена] Када је $V > V_{\rm th}$, диск се креће горе-доле између плоча. (Претпоставите да се креће само у вертикалном правцу, остајући све време хоризонталан). Судари диска и плоча су нееластичин са реституционим коефицијентом $\eta = v_{\rm after}/v_{\rm before}$, где су $v_{\rm before}$ и $v_{\rm after}$ редом брзине диска непосредно пре и непосредно после судара. Плоче су све време непокретне. Брзина диска непосредно после судара са доњом плочом са временом се приближава стабилној вредности $v_{\rm s}$, која зависи од V на следећи начин:

$$v_{\rm s} = \sqrt{\alpha V^2 + \beta}.$$

Одредите коефицијенте α и β и изразите их у функцији од m, g, χ, d и η. Претпоставите да диск равномерно и истовремено целом својом површином додирује плочу, тако да се комплетна размена наелектрисања одиграва тренутно при сваком судару.

д) [2.2 поена] Након достизања стабилне вредности $v_{\rm s}$, временски усредњена вредност струје I кроз кондензатор може да се апроксимира са $I = \gamma V^2$ ако је $qV \gg mgd$. Изразите коефицијент γ преко величина m, χ, d и η.

ђ) [3 поена] Када се примењени напон V смањује (јако споро), постоји критични напон V_c испод кога наелектрисање престаје да протиче. Одредите V_c и одговарајућу струју I_c и изразите их у функцији од m, g, χ, d и η. Поредећи V_c са граничним напоном $V_{\rm th}$ разматраним под (в), нацртајте грубо $I(V)$ зависност када V расте и када опада у опсегу од $V = 0$ до $3V_{\rm th}$.

Теоријски задатак 2: Подизање балона

Гумени балон напуњен хелијумом подиже се високо према небу, при чему притисак и температура опадају са висином. У задатку који следи, претпоставите да облик балона остаје сферан без обзира на терет који носи и занемарите запремину терета обешеног о балон. Претпоставите да је температура хелијума у балону увек једнака температури околног ваздуха. Све гасове сматрајте идеалним. Универзална гасна константа је $R = 8.31\,\mathrm{J/mol\cdot K}$, моларне масе хелијума и ваздуха износе редом $M_{He} = 4.00 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg/mol}$ и $M_A = 28.9 \cdot 10^{-3}\mathrm{kg/mol}$. Гравитационо убрзање износи $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$.

[Део А]

а) [1.5 поена] Нека је притисак ваздуха око балона P, а температура T. Притисак у балону је већи од притиска у околном ваздуху због површинског напона балона. Балон садржи n молова гаса хелијума и притисак у унутрашњости је $P + \Delta P$. Одредите силу потиска $F_{\rm B}$ која делује на балон као функцију P и ΔP.

б) [2 поена] Једног сунчаног дана у Кореји, температура ваздуха T на висини z у односу на ниво мора била је дата са $T(z) = T_0(1 - z/z_0)$ за опсег $0 < z < 15\,\mathrm{km}$, при чему је $z_0 = 49\,\mathrm{km}$ и $T_0 = 303\,\mathrm{K}$. Притисак и густина ваздуха на нивоу мора износили су редом $P_0 = 1\,\mathrm{atm} = 1.01 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}$ и $\rho_0 = 1.16\,\mathrm{kg/m^3}$. За овај опсег висина, притисак зависи од висине по формули

$$P(z) = P_0(1 - z/z_0)^\eta.$$

Изразите η у функцији од z_0, ρ_0, P_0 и g и израчунајте његову бројну вредност са две значајне цифре. Гравитационо убрзање сматрајте константним, независним од висине.

[Део Б]

Када се гумени балон сферног облика, полупречника r_0 у недеформисаном стању, надува до сфере полупречника $r(\geq r_0)$, површина балона има додатну еластичну енергију као последицу деформације. Према поједностављеној теорији, енергија еластичне деформације на константној температури T износи

$$U = 4\pi r_0^2\,\kappa RT \left(2\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^3} - 3\right),$$

где $\lambda \equiv r/r_0 (\geq 1)$ представља однос полупречника балона, а κ је константа дата у јединицама $\mathrm{mol/m^2}$.

в) [2 поена] Изразите ΔP у функцији параметара датих у једначини за еластичну енергију U и скицирајте ΔP у функцији од $\lambda \equiv r/r_0$.

г) [1.5 поена] Константа κ се може одредити из количине гаса потребног за надувавање балона. На $T_0 = 303\,\mathrm{K}$ и $P_0 = 1.0\,\mathrm{atm}$, недеформисани балон садржи $n_0 = 12.5\,\mathrm{mol}$ хелијума. Потребно му је укупно $n = 3.6n_0 = 45\,\mathrm{mol}$ за надувавање балона до $\lambda = 1.5$ при истим T_0 и P_0. Одредите параметар балона a, дефинисан као $a = \kappa/\kappa_0$, и изразите га у функцији n, n_0 и λ где је $\kappa_0 \equiv \frac{r_0 P_0}{4RT_0}$. Израчунајте вредност a на две значајне цифре.

[Део B]

Балон је припремљен као под (г) на нивоу мора (надуван до $\lambda = 1.5$ са $n = 3.6n_0 = 45\,\mathrm{mola}$ гаса хелијума на $T_0 = 303\,\mathrm{K}$ и $P_0 = 1.0\,\mathrm{atm} = 1.01\cdot 10^5$ Pa). Укупна маса балона, гаса и терета окаченог о балон износи $M_\mathrm{T} = 1.12\,\mathrm{kg}$. Сада ћемо разматрати подизање балона од нивоа мора.

д) [3 поена] Претпоставимо да се балон зауставио на висини z_f где је сила потиска изједначена са укупном тежином. Одредите z_f и однос полупречника λ_f на тој висини. Изразите резултат са две значајне цифре. Претпоставите да нема заношења балона, као ни истицања гаса у току подизања.

Теоријски задатак 3: Атомска микроскопија

"Atomic Probe" микроскопи (APM) предстваљају веома значајне уређаје за истраживања у области нано-физике. Кретање сонде у APM-у прати се фото-детектором који детектује рефлектовани ласерски зрак, као што је приказано на слици 2. Сонда се може кретати само у вертикалном правцу и њено померање z у функцији времена t може се описати једначином

$$m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} + b\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + kz = F,$$

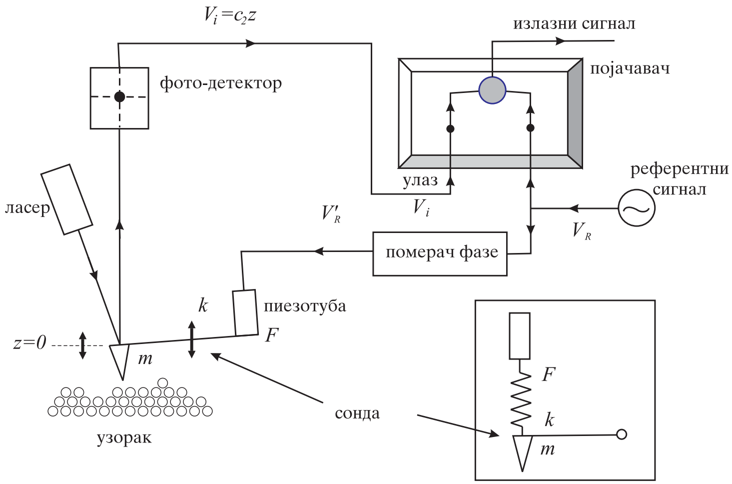
где је m маса сонде, $k = m\omega_0^2$ је константа еластичности сонде, b је мали коефицијент пригушења који задовољава услов $\omega_0 \gg b/m > 0$, а F је спољашња сила која потиче од пиезоелектричне тубе (пиезотубе).

[Део A]

а) [1.5 поена] Када је $F = F_0 \sin\omega t$, $z(t)$ које задовољава горњу диференцијалну једначину може да се напише у облику $z(t) = A\sin(\omega t - \phi)$, где је $A > 0$ и $0 \leq \phi \leq \pi$. Изразите амплитуду A и $\mathrm{tg}\phi$ у функцији F_0, m, ω, ω_0 и b. Израчунајте A и ϕ на фреквенцији резонанције $\omega = \omega_0$.

б) [1 поен] Појачавач приказан на сл. 2 множи улазни сигнал са референтним сигналом $V_\mathrm{R} = V_{\mathrm{R}0}\sin\omega t$, дајући на излазу сигнал који је производ ова два сигнала (сигнал производ). Из појачавача излази само једносмерна компонента сигнала производа (dc компонента, од direct current). Претпоставите да је улазни сигнал дат у облику $V_i = V_{i0}\sin(\omega_i t - \phi_i)$. Овде су $V_{\mathrm{R}0}$, V_{i0}, ω_i и ϕ_i дате позитивне константе. Одредите услов који треба да задовољава $\omega(>0)$ при коме излазни сигнал није једнак нули. Напишите израз за амплитуду ненултог dc излазног сигнала производа на овој фреквенцији.

в) [1.5 поена] Извор референтног сигнала шаље напон на појачавач и на померач фазе. Пролазећи кроз уређај за померање фазе, референтни напон $V_\mathrm{R} = V_{\mathrm{R}0}\sin\omega t$ се мења у $V'_\mathrm{R} = V_{\mathrm{R}0}\sin(\omega t + \pi/2)$. Када се V'_R доведе на пиезоелектричну тубу, на сонду делује сила $F = c_1 V'_\mathrm{R}$. Фото-детектор претвара померање сонде z у напон $V_i = c_2 z$. Овде су c_1 и c_2 константе. Одредите амплитуду излазног dc сигнала када је $\omega = \omega_0$.



Слика 2: Шематски приказ АРМ-а. Додатак у доњем десном делу слике представља поједностављени механички модел који описује везу пиезотубе и сонде.

г) [2 поена] Мала промена Δm масе сонде мења резонантну фреквенцију за $\Delta\omega_0$. Као резултат, фаза ϕ на почетној резонантној фреквенцији ω_0 се помера за $\Delta\phi$. Нађите промену масе Δm која одговара померању фазе за $\Delta\phi = \pi/1800$ (типична резолуција у фазним мерењима). Физички параметри сонде су $m = 1.0 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{kg}$, $k = 1.0\,\mathrm{N/m}$ и $b/m = 1.0 \cdot 10^3\,\mathrm{s}^{-1}$. Користите апроксимацију $(1+x)^a \approx 1 + ax$ и $\mathrm{tg}(\pi/2 + x) \approx -1/x$, када је $|x| \ll 1$.

[Део Б]

Размотримо сада ситуацију у којој, осим силе која потиче од пиезотубе разматране у Делу А, на сонду делују додатне силе због присуства узорка, као што је приказано на сл. 2.

х) [1.5 поена] Претпостављајући да додатна сила $f(h)$ зависи само од растојања h између сонде и површине узорка, може се наћи нов равнотежни положај сонде h_0. У близини тачке $h = h_0$ можемо да напишемо $f(h) \approx f(h_0) + c_3(h - h_0)$, где је c_3 константа независна од h. Одредите нову резонантну фреквенцију ω_0' као функцију од ω_0, m и c_3.

и) [2.5 поена] У току снимања површине хоризонталним померањем узорка, врх сонде је наелектрисан са $Q = 6e$ и налази изнад електрона наелектрисања $q = e$ заробљеног (локализованог у простору) на неком растојању испод површине узорка. У току померања врха сонде у близини електрона (скенирања око електрона), максимално померање резонантне фреквенције $\Delta\omega_0 = \omega_0' - \omega_0$ је много мање од ω_0. Изразите растојање d_0 од сонде до заробљеног електрона при максималном померању резонантне фреквенције, у функцији величина m, q, Q, ω_0, $\Delta\omega_0$ и Кулонове константе k_e. Израчунајте d_0 у nm ($1\,\mathrm{nm} = 10^{-9}\,\mathrm{m}$) за $\Delta\omega_0 = 20\,\mathrm{s}^{-1}$. Физички параметри сонде су $m = 1.0 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{kg}$ и $k = 1.0\,\mathrm{N/m}$. Занемарите било какав поларизациони ефекат на врху сонде и на површини узорка. Дате су константе $k_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.0 \cdot 10^9\,\mathrm{Nm^2/C^2}$ и $e = -1.6 \cdot 10^{-19}\mathrm{C}$.