РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА ШКОЛСКЕ 2003/2004. ГОДИНЕ

Крушевац, 15. мај 2004. године

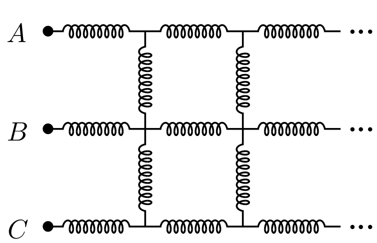
Решења задатака за III разред

1. Дуж краћег крака рама важи $m\,a = -k\,(l-l_0) + F_{cf}\sin\alpha + m\,g\sin(\omega t + \varphi_0 - \alpha)$, где смо са l обележили тренутну дужину опруге, са l_0 дужину опруге у неистегнутом стању, са a пројекцију убрзања тела, а са $F_{cf} = m\omega^2\,l/\sin\alpha$ центрифугалну силу. Овде је α угао који заклапа дужи крак рама и права p која пролази кроз тачку O и тренутни положај тела. Претпоставили смо да је угао између вертикале и праве p једнак $\omega t+\varphi_0$. Дакле, видимо да је у питању кретање под деловањем принудне хармонијске силе. Сопствену фреквенцију система ω_0 добијамо разматрањем једначине у којој нема принудне силе, односно $ma = -k\,(l-l_0)+F_{cf}\sin\alpha = -k\,(l-l_0)+m\,\omega^2\,l$. Како је у овом случају $ma = -(k-m\,\omega^2)\,l+k\,l_0 = -(k-m\,\omega^2)(l-l_R)$, где је $l_R = k\,l_0/(k-m\,\omega^2)$ нова равнотежна дужина опруге, видимо да је $\omega_0^2 = k/m - \omega^2$. Јасно је да се само за $k/m > \omega^2$ јављају мале осцилације. Коначно је $X_0 = m\,g/m|\,\omega_0^2 - \omega^2|$, односно $X_0 = g/|k/m - 2\,\omega^2|$, пошто је амплитуда принудне силе једнака $m\,g$.

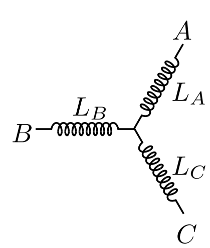
2. Дужина дела жице који осцилује је константна, па период сваког хармоника зависи само од интензитета брзине простирања трансверзалних таласа v и обрнуто јој је сразмеран. Фреквенција је $\nu = \alpha\,v = \alpha\,\sqrt{F/\mu} = \alpha\,\sqrt{k\,\Delta L/\mu}$, где су α и k одговарајући коефицијенти пропорционалности, ΔL је промена дужине жице, а μ подужна маса жице. Ако са ν_0, ν_1 и ν_2 означимо редом фреквенције тонова `Fis`, `Gis` и `A`, онда важи $\nu_0 = \alpha\,\sqrt{k\,\Delta L/\mu}$, $\nu_1 = \alpha\,\sqrt{k\,(\Delta L + d_1)/\mu}$ и $\nu_2 = \alpha\,\sqrt{k\,(\Delta L + d_2)/\mu}$, где су d_1 и d_2 дужине за које је жицу потребно истегнути да би се од тона `Fis` добили редом тонови `Gis` и `A`. Претпоставили смо да је подужна маса μ константна јер су промене укупне дужине жице мале. Како је $\nu_1/\nu_0 = \left(\sqrt[12]{2}\right)^2 = \sqrt{(\Delta L + d_1)/\Delta L}$, следи $d_1/\Delta L = \left(\sqrt[12]{2}\right)^4 - 1$ и, аналогно, $d_2/\Delta L = \left(\sqrt[12]{2}\right)^6 - 1$. Сада је $d_2/d_1 = (\sqrt{2}-1)/(\sqrt[3]{2}-1)$, па коначно добијамо да чивију треба окренути за угао $\varphi = \frac{d_2-d_1}{d_1}\cdot 360^\circ$, односно $\varphi \approx 214^\circ$.

3. а) При тражењу еквивалентне индуктивности кола које се састоји од завојница важе иста правила као при тражењу еквивалентне отпорности кола које се састоји од термогених отпорника. Произвољно коло које се састоји од завојница и има три улаза (као у овом случају) може се заменити еквивалентним колом облика звезде (слике 1а и 1б). Даље, индуктивност бесконачног кола се не мења ако му се придода још једна основна јединица, као на слици 1ц. Дакле, $L_{A'B'} = L_{AB}$ и $L_{A'C'} = L_{AC}$. Због симетрије важи $L_A = L_C$. Када се у коло са слике 1ц повеже извор струје преко улаза A' и C', због симетрије су тачке B и D увек на истом потенцијалу, па се ефективно може уклонити завојница између ових тачака. Из еквивалентности шема на сликама 1б и 1ц (повезивање извора струје на улазе A' и C' на слици 1ц одговара прикључивању истог извора на улазе A и C на слици 1б) следи $L_{AC} = L_A + L_C = L_{A'C'} = 2L + (2L \parallel (L_A + L_C))$. Ако искористимо $L_A = L_C$, из ове једначине добијамо $L_A^2 - L\,L_A - L^2 = 0$, односно $L_A = L\,(1\pm\sqrt{5})/2$. Како је $L_A > 0$, закључујемо да је $L_A = L_C = L\,(1+\sqrt{5})/2$, па је коначно $L_{AC} = L_A + L_C = (1+\sqrt{5})\,L$, односно $L_{AC} \approx 3.2\,L$.

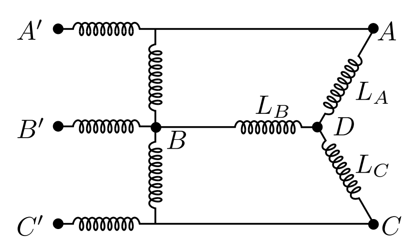
   б) Из шема на сликама 1б и 1ц следи $L_{AB} = L_A + L_B = L_{A'B'} = 2L + L \parallel (L_A + (L_B \parallel (L_C + L))) = 2L + L\,\frac{L_A^2+2\,L_A\,L_B+L\,L_A+L\,L_B}{(L+L_A)^2+2\,L_B\,(L+L_A)}$. Замењујући вредност $L_A = L\,(1+\sqrt{5})/2$ коју смо добили у првом делу задатка, долазимо до квадратне једначине $(3+\sqrt{5})\,L_B^2 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}\,L\,L_B - (\frac{3+\sqrt{5}}{2})^2 L^2 = 0$. Решавајући ову једначину добијамо $L_B = \frac{-(\sqrt{5}-1)\pm\sqrt{294+126\sqrt{5}}}{4(3+\sqrt{5})}\,L$, па због $L_B > 0$ следи $L_B \approx 1.1\,L$ и коначно $L_{AB} = L_A + L_B \approx 2.7\,L$.



Слика 1а



Слика 1б



Слика 1ц

4. Једначина кретања куглице C дуж штапа је $m\,a = m\,\Omega^2\,r - \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{(R-r)^2} - \frac{1}{(R+r)^2}\right) = m\,\Omega^2\,r - \frac{R\,q^2}{\pi\varepsilon_0}\,\frac{r}{(R^2-r^2)^2}$, где је a пројекција убрзања штапа, а r је растојање куглице од центра штапа. Из услова $a = 0$ налазимо да је један равнотежни положај куглице $r_1 = 0$, а други $r_2 = \left(R^2 - \sqrt{\frac{Rq^2}{\pi\varepsilon_0 m\Omega^2}}\right)^{1/2}$, при чему други равнотежни

положај постоји само ако је $R^3 > \frac{q^2}{\pi\varepsilon_0 m\Omega^2}$. Замењујући $r = r_1 + x$ у једначину кретања и задржавајући само чланове линеарне по x, добијамо $m\,a = -\left(\frac{q^2}{\pi\varepsilon_0 R^3} - m\Omega^2\right)x$. Положај r_1 је стабилан само ако важи $R^3 < \frac{q^2}{\pi\varepsilon_0 m\Omega^2}$, и тада не постоји други равнотежни положај. Фреквенција малих осцилација око овог положаја је $\omega_1 = \sqrt{\frac{q^2}{\pi\varepsilon_0 m R^3} - \Omega^2}$. Уколико важи $R^3 > \frac{q^2}{\pi\varepsilon_0 m\Omega^2}$, тада први положај није стабилан, а за други положај, замењујући $r = r_2 + x$, добијамо $m\,a = m\,\Omega^2\,(r_2 + x) - \frac{Rq^2}{\pi\varepsilon_0}\frac{r_2+x}{(R^2-r_2^2-2r_2x-x^2)^2}$. Задржавајући само чланове највише линеарне по x, ова једначина се своди на $ma = \left(m\Omega^2 - \frac{Rq^2}{\pi\varepsilon_0(R^2-r_2^2)^2}\right)(r_2+x) - \frac{4Rq^2r_2^2}{\pi\varepsilon_0(R^2-r_2^2)^3}x$. Узимајући у обзир израз за r_2, први члан са десне стране је једнак нули, па је фреквенција малих осцилација око овог положаја $\omega_2 = \sqrt{\frac{4Rq^2r_2^2}{\pi\varepsilon_0 m(R^2-r_2^2)^3}} = \Omega\sqrt{\frac{4\,r_2^2}{R^2-r_2^2}} = 2\,\Omega\left(\sqrt{\frac{\pi\varepsilon_0 m\Omega^2 R^3}{q^2}} - 1\right)^{1/2}$. За $R^3 = \frac{q^2}{\pi\varepsilon_0 m\Omega^2}$ нема линеарног члана у једначини кретања, па кретање нема карактер малих осцилација.

5. а) У току пражњења кондензатора је промена напона ΔU на кондензатору за време Δt дата са $\Delta U = \Delta Q/C$, где је ΔQ наелектрисање које је протекло у колу. Како је $\Delta Q = -I\,\Delta t$, где је $I = U/R_e$ јачина струје у колу (са R_e смо означили еквивалентан термогени отпор кола), имамо $\Delta U = -U\Delta t/R_eC$, одакле је $\Delta U/\Delta t = -U/R_eC$. Решење ове једначине је $U = U_0\,e^{-t/R_eC}$, где је U_0 напон на кондензатору у тренутку $t = 0$. Ако са r означимо унутрашњи отпор волтметра, онда у првом експерименту важи $U_1 = U_{01}\,e^{-t/rC}$, а у другом експерименту $U_2 = U_{02}\,e^{-t(r+R)/rRC}$. Логаритмовањем добијамо $\ln U_1 = \ln U_{01} - t/rC$ и $\ln U_2 = \ln U_{02} - t\,(r+R)/rRC$, што су линеарне зависности од времена. У табелама 1 и 2 унети су логаритмовани напони, а на сликама 2а и 2б нацртани су тражени графици.

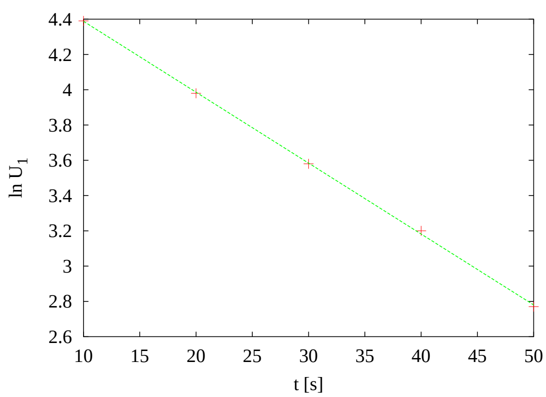
   б) Прво ћемо одредити коефицијенте праваца за графике добијене у претходном делу задатка. Грешка мерења напона је $\Delta U_1 = \Delta U_2 = 0.5\,\mathrm{V}/2 \approx 0.3\,\mathrm{V}$, док је грешка мерења времена $\Delta t = 0.5\,\mathrm{s}$. Да бисмо одредили коефицијент правца k_1 за график са слике 2а, одабраћемо две тачке на овом графику, A(15 s, 4.2) и B(45 s, 3.0). Сада је $k_1 = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, односно $k_1 = -0.040\,\mathrm{s}^{-1}$. Релативна грешка је $\Delta k_1/|k_1| = \frac{\Delta x_B + \Delta x_A}{x_B - x_A} + \frac{\Delta y_B + \Delta y_A}{|y_B - y_A|}$. Имамо $\Delta x_A = \Delta x_B = \Delta t = 0.5\,\mathrm{s}$, а $\Delta y_A = \Delta U_1/U_{1A} \approx 0.3/60 \approx 5\cdot 10^{-3}$ и $\Delta y_B = \Delta U_1/U_{1B} \approx 0.3/20 \approx 2\cdot 10^{-2}$. Сада је $\Delta k_1/|k_1| = 0.054$, одакле је $\Delta k_1 = 0.0021\,\mathrm{s}^{-1} \approx 0.002\,\mathrm{s}^{-1}$, па је $k_1 = (-0.040 \pm 0.002)\,\mathrm{s}^{-1}$. За други график бирамо тачке A(15 s, 4.0) и B(45 s, 1.5). Сада је $k_2 = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, односно $k_2 = -0.083\,\mathrm{s}^{-1}$. Релативна грешка је $\Delta k_2/|k_2| = \frac{\Delta x_B + \Delta x_A}{x_B - x_A} + \frac{\Delta y_B + \Delta y_A}{|y_B - y_A|}$. Имамо $\Delta x_A = \Delta x_B = \Delta t = 1\,\mathrm{s}$, а $\Delta y_A = \Delta U_2/U_{2A} \approx 0.3/70 \approx 4\cdot 10^{-3}$ и $\Delta y_B = \Delta U_2/U_{2B} \approx 0.3/5 \approx 6\cdot 10^{-2}$. Сада је $\Delta k_2/|k_2| = 0.059$, одакле је $\Delta k_2 = 0.0049\,\mathrm{s}^{-1} \approx 0.005\,\mathrm{s}^{-1}$, па је $k_2 = (-0.083 \pm 0.005)\,\mathrm{s}^{-1}$. Како је $k_1 = -1/rC$ и $k_2 = -(r+R)/rRC$, одузимањем добијамо $k_1 - k_2 = 1/RC$, па је $C = 1/R(k_1 - k_2)$, односно $C = 2.11\,\mu\mathrm{F}$. Релативна грешка је $\Delta C/C = \Delta R/R + \Delta(k_1 - k_2)/(k_1 - k_2) = \Delta R/R + (\Delta k_1 + \Delta k_2)/(k_1 - k_2) \approx 0.17$, па је $\Delta C \approx 0.4\,\mu\mathrm{F}$. Коначно је $C = (2.1 \pm 0.4)\,\mu\mathrm{F}$.

t [s]	10	20	30	40	50
$\ln U_1$	4.39	3.98	3.58	3.20	2.77

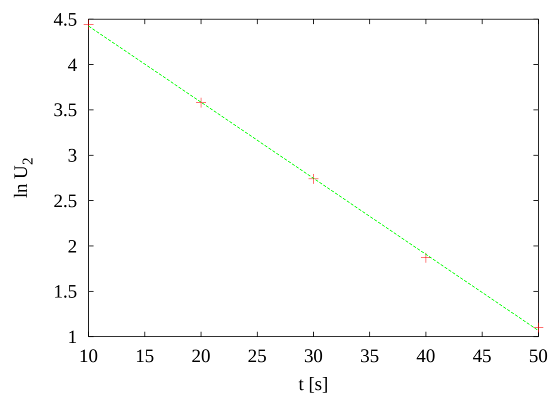
Табела 1

t [s]	10	20	30	40	50
$\ln U_2$	4.44	3.58	2.74	1.87	1.10

Табела 2



Слика 2а



Слика 2б

Задатке припремио: Игор Салом
Рецензент: Антун Балаж
Председник комисије: др Мићо Митровић