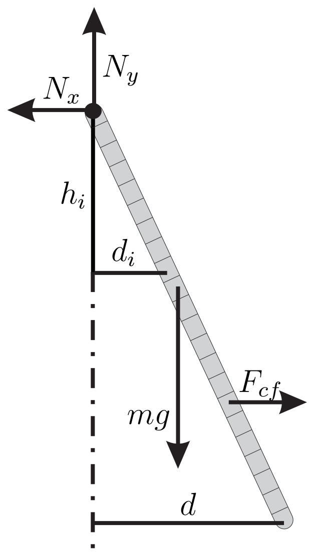
ЈУГОСЛОВЕНСКО ДРУШТВО ФИЗИЧАРА
МИНИСТАРСТВО ПРОСВЕТЕ И СПОРТА РЕПУБЛИКЕ СРБИЈЕ
МИНИСТАРСТВО ПРОСВЈЕТЕ И НАУКЕ РЕПУБЛИКЕ ЦРНЕ ГОРЕ
МИНИСТАРСТВО ЗА ПРОСВЈЕТУ, НАУКУ И КУЛТУРУ
РЕПУБЛИКЕ СРПСКЕ

Решења задатака са савезног такмичења ученика средњих школа
28. мај 2004.

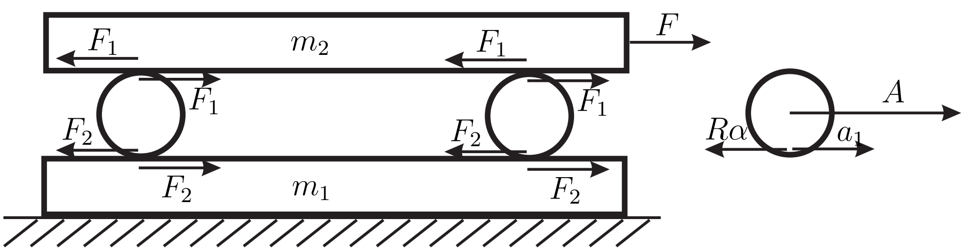
Први разред



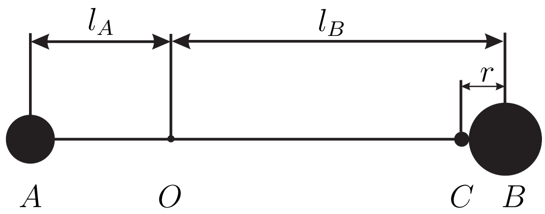
1. Изделимо штап на n делића масе $\Delta m = \frac{m}{n}$. Укупна центрифугална сила која делује на штап је сума центрифугалних сила на сваки његов делић $F_{cf} = \sum_{i=1}^{n} \Delta m d_i \omega^2$. Ако је d_1 растојање првог делића штапа од осе, онда је $d_i = id_1$ и $d = nd_1$, па је $F_{cf} = \Delta m d_1 \omega^2 \sum_{i=1}^{n} i = md\omega^2 \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2} md\omega^2$. Укупни момент центрифугалне силе која делује на штап је $M_{cf} = \sum_{i=1}^{n} \Delta m d_i \omega^2 h_i$. Како је $h_i = ih_1 = ih\frac{d_1}{d}$, то је $M_{cf} = mdh\omega^2 \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{3} mdh\omega^2$. Изједначавањем момента силе теже који делује на половини штапа и момента центрифугалне силе $mg\frac{d}{2} = \frac{1}{3} mdh\omega^2$ добијамо $h = \frac{3g}{2\omega^2}$, односно $d = \sqrt{l^2 - \frac{9g^2}{4\omega^4}}$. Из равнотеже сила $mg = N_y$ и $\frac{1}{2} md\omega^2 = N_x$ добијамо да је сила реакције $N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2} = \frac{1}{2} ml\omega^2 \sqrt{1 + \frac{7g^2}{4l^2\omega^4}}$.

2. Момент инерције шупљег ваљка око осе симетрије добијамо ако од момента инерције 'целог' ваљка масе $M + M_1$, где је M_1 маса 'шупљег дела', одузмемо момент инерције шупљег дела: $I = \frac{1}{2}(M + M_1)R^2 - \frac{1}{2} M_1 \eta^2 R^2$. Како је $M_1 = M \frac{\eta^2 R^2}{R^2 - \eta^2 R^2}$, то је $I = \frac{1}{2} MR^2 (1 + \eta^2)$. Једначина за транслацију бурета са нафтом низ стрму раван испројектована на правац кретања је $(M+m)a = \frac{1}{2}(M+m)g - F$, где је F сила трења котрљања. Како је трење између нафте и бурета занемарљиво, ротира само буре, па је једначина за ротацију бурета $I\alpha = FR$. Пошто нема проклизавања бурета то је $a = R\alpha$, па је коначно $a = g\frac{M+m}{(3+\eta^2)M + 2m}$.

3. Једначина транслације доње даске је $m_1 a_1 = 2F_2$. Једначина за ротацију ваљка је $I\alpha = (F_1 + F_2)R$, а за транслацију $MA = F_1 - F_2$. Момент инерције ваљка је $I = \frac{1}{2} MR^2$. Једначина кретања горње даске је $m_2 a_2 = F - 2F_1$. Како је убрзање додирне тачке ваљка и доње даске a_1 и цилиндар не проклизава по њој то је $A - R\alpha = a_1$. Убрзање горње даске је $a_2 = A + R\alpha$. Решавањем једначина добијамо да је $a_1 = -F\frac{M}{4m_1m_2 + 3M(m_1+m_2) + 2M^2}$ и $a_2 = F\frac{3M + 4m_1}{4m_1m_2 + 3M(m_1+m_2) + 2M^2}$. Видимо да се доња даска креће у супротном смеру од претпостављеног.



4. Пошто су масе тела A и B много веће од масе свемирског брода можемо сматрати да се тела A и B крећу око заједничког центра масе O по кружницама јер је међусобно растојање непроменљиво током кретања. Једначине кретања су $M_A l_A \omega^2 = \gamma\frac{M_A M_B}{R^2}$ и $M_B l_B \omega^2 = \gamma\frac{M_A M_B}{R^2}$. Како је $l_A + l_B = R$ сабирањем једначина добијамо да је $\omega^2 = \gamma\frac{M_A+M_B}{R^3}$. Ако је F_{CB} укупна сила између тела C и B, једначина за равнотежу тела C је $F_{CB} - \gamma\frac{mM_A}{(R-r)^2} + m(l_B - r)\omega^2 = 0$. Пошто је r много мање од R то је $\frac{r}{R} \ll 1$, па је $\frac{1}{(R-r)^2} = \frac{1}{R^2(1-\frac{r}{R})^2} = \frac{1}{R^2}(1 + 2\frac{r}{R})$. За тело C можемо писати $F_{CB} = \gamma\frac{mM_A}{R^2}(1 + 2\frac{r}{R}) - \gamma\frac{mM_A}{R^2} + \gamma\frac{m(M_A+M_B)r}{R^3} = \gamma\frac{m(3M_A+M_B)r}{R^3}$. С друге стране $F_{CB} = \gamma\frac{mM_B}{r^2} - N$ где је N сила реакције подлоге (тежина свемирског брода). Из претходних једначина добијамо $N = \gamma\frac{mM_B}{r^2} - \gamma\frac{m(3M_A+M_B)r}{R^3}$, што се може написати у облику $N = \gamma\frac{mM_B}{r^2}(1 - \frac{r^3}{R^3}(1 + 3\frac{M_A}{M_B}))$, односно $N = Q(1 - \eta^3(1 + 3\mu))$.



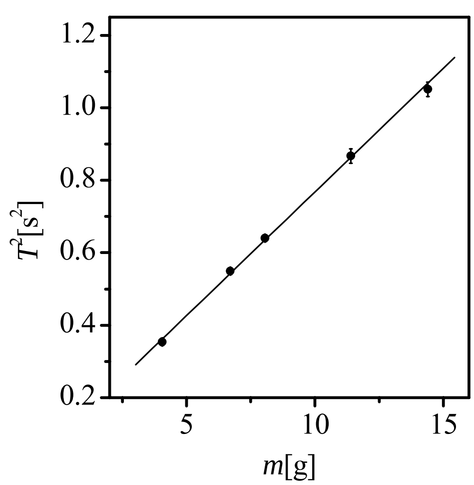
Задатке припремио: Зоран Ристивојевић
Рецензент: др Александар Срећковић
Председник комисије: др Мићо Митровић

Савезно такмичење 2004.

Решење експерименталног задатка

Мерено је време t потребно да опруга оптерећена масом m направи n осцилација. Период осциловања је $T=\frac{t}{n}$, где је $n=10$ број осцилација. Време t се је одређено из три директна мерења, $t_s=\frac{t_1+t_2+t_3}{3}$, а апсолутна грешка као максимално одступање $\left|t_i-t_s\right|_{max}$. Пошто је $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, из линеарне зависности $T^2=\frac{4\pi^2}{k}m$ може се одредити непозната константа опруге k. Резултати мерења дати су у табели.

	$m[g]$	$t_i[\mathrm{s}]$	$t_S[\mathrm{s}]$	$\Delta t[\mathrm{s}]$	$T=\frac{t}{n}[\mathrm{s}]$	$\Delta T=\frac{\Delta t}{n}[\mathrm{s}]$	$T^2[\mathrm{s}^2]$	$\Delta T^2=2T\Delta T[\mathrm{s}^2]$
1	4.05	5.94 6.04 5.92	5.967 5.97	0.073 0.08	0.5967 0.597	0.0073 0.008	0.356 0.36	0.0087 0.01
2	6.70	7.47 7.39 7.37	7.407 7.41	0.063 0.07	0.7407 0.741	0.0063 0.007	0.549 0.55	0.0093 0.01
3	8.05	8.03 8.06 7.91	8.000 8.00	0.090 0.09	0.8000 0.800	0.0090 0.009	0.640 0.64	0.011 0.01
4	11.4	9.31 9.25 9.38	9.313 9.31	0.067 0.07	0.9313 0.931	0.0067 0.007	0.867 0.87	0.012 0.02
5	14.4	10.31 10.20 10.25	10.253 10.25	0.057 0.06	1.0253 1.025	0.0057 0.006	1.051 1.05	0.012 0.02



Са графика $T^2=f(m)$, одређује се коефицијент правца праве избором две неексперименталне тачке, нпр. $\mathrm{A}(5.3\mathrm{g};\ 0.45\mathrm{s}^2)$ између прве и друге и $\mathrm{B}(12.6\mathrm{g};\ 0.95\mathrm{s}^2)$ између последње и претпоследње експерименталне тачке.

Коефицијент правца се израчунав као:

$$a = \frac{T_{\mathrm{B}}^2 - T_{\mathrm{A}}^2}{m_{\mathrm{B}} - m_{\mathrm{A}}} = \frac{(0.95 - 0.45)\mathrm{s}^2}{(12.6 - 5.3)\mathrm{g}} = 68.5\,\frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{kg}}\,.$$

Релативна грешка се израчунава као $\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta\left(T^2\right)_{\mathrm{B}} + \Delta\left(T^2\right)_{\mathrm{A}}}{T_{\mathrm{B}}^2 - T_{\mathrm{A}}^2} + \frac{\Delta m_{\mathrm{B}} + \Delta m_{\mathrm{A}}}{m_{\mathrm{B}} - m_{\mathrm{A}}}$

$\frac{\Delta a}{a} = \frac{0.0093 + 0.012}{0.95 - 0.45} + \frac{0.1 + 0.1}{12.6 - 5.3} = 0.07 \Rightarrow \Delta a = 4.8\,\frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{kg}}$, па је $a = (68 \pm 5)\frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{kg}}$.

в) Пошто је $a = \frac{4\pi^2}{k}$, следи да је $k = \frac{4\pi^2}{a} = \frac{4\pi^2}{68.5} = 0.576\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$.

$\frac{\Delta k}{k} = \frac{\Delta a}{a} = \;\Rightarrow\; \Delta k = 0.04\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$.

Тражена константа еластичности опруге износи:

$$k = (0.58 \pm 0.04)\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\,.$$