XXXIX САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА ОСНОВНИХ И СРЕДЊИХ ШКОЛА СРБИЈЕ И ЦРНЕ ГОРЕ

Београд, 28. – 30. мај 2004. године

Решења теоријских задатака за III разред

1. За напон U важи $U = U_0 (\cos t\sqrt{k/m})^2 = \frac{U_0}{2} + \frac{U_0}{2}\cos(2t\sqrt{k/m})$. Ако са a означимо интензитет убрзања куглице у стационарном стању, а са x њено растојање од првобитног равнотежног положаја (пре укључивања напона), једначина кретања куглице има облик $m\,a = -k\,x + qU/H = -k\,(x - x_R) + \frac{q\,U_0}{2\,H}\cos(2t\sqrt{k/m})$, где је $x_R = \frac{q\,U_0}{2\,k\,H}$ дужина за коју се додатно померио равнотежни положај. (Тежина тела је само померила првобитни равнотежни положај тела на висину h_0 и нема потребе да је урачунавамо). Видимо да је у питању осцилаторно кретање под деловањем принудне силе са фреквенцијом $\omega = 2\sqrt{k/m}$. Разматрањем једначине кретања у којој нема принудне силе добијамо сопствену фреквенцију система $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Амплитуда принудног осциловања је $x_0 = \frac{F_0}{m\,|\omega_0^2 - \omega^2|} = \frac{q\,U_0}{2\,H\,m\,|\omega_0^2 - 4\,k/m|} = \frac{q\,U_0}{6\,k\,H}$. Услов да тело не удари о површину земље своди се на $h_0 > x_0 + x_R$, одакле следи $U_0 < 3\,k\,h_0\,H/2\,q$.

2. Отпор дела кружног рама (у смеру ротације) између тачке A и тренутног положаја шипке је $R_1(t) = \lambda\,r\,\omega\,t$, а отпор преосталог дела кружног рама је $R_2(t) = \lambda\,r\,(2\pi - \omega\,t)$. Због померања шипке имамо две струјне контуре са промењивим флуксом. Интензитет индуковане електромоторне силе је у обе контуре исти и једнак је $\varepsilon = B\,\frac{\Delta S}{\Delta t} = B\,\omega\,r^2/2$. Како је отпор шипке занемарљив, потенцијали на њеним крајевима су једнаки, па се коло може упростити тако да садржи три паралелно везане гране: у првој тече струја I_1, а састоји се од отпора R_1 и извора електроморне силе ε, у другој тече струја I_2, а она се састоји од отпора R_2 и извора електромоторне силе ε, док је у трећој грани везана сијалица отпора R, а струја је једнака $I = I_1 + I_2$. Због смера индукованих електромоторних сила за контуру која садржи прву и другу грану важи $I_1\,R_1 = I_2\,R_2$, док за контуру која садржи прву и трећу грану важи $I_1\,R_1 + (I_1 + I_2)\,R = \varepsilon$. Решавањем овог система за интензитет струје кроз сијалицу добијамо $I(t) = \varepsilon/(R + R_1(t) \parallel R_2(t)) = \frac{\pi B\omega r^2}{2\pi R + \lambda r\omega t(2\pi - \omega t)}$. Снага је $P = R\left(\frac{\pi B\omega r^2}{2\pi R + \lambda r\omega t(2\pi - \omega t)}\right)^2$.

3. Временски облик напона на крајевима звучника је $u_{AC}(t) = u_{AB}(t) + u_{BC}(t)$. Пошто је струја која протиче кроз звучник занемарљива, амплитуде ових напона су $U_{AB} = U_1\,\frac{\sqrt{R^2 + (1/\omega_1\,C)^2}}{\sqrt{R^2 + (\omega_1\,L - 1/\omega_1\,C)^2}}$ и $U_{BC} = U_2$. Временски облик напона $u_{AC}(t)$ је збир две хармонијске осцилације блиских фреквенција ν_1 и ν_2. Интензитет звука ће периодично падати на нулу само ако су амплитуде U_{AB} и U_{BC} полазних осцилација исте, тј. ако је $U_{AB} = U_2$. Тада је $u_{AC} = U_2\,(\cos(\omega_1 t + \phi_1) + \cos(\omega_2 t + \phi_2)) = 2\,U_2\,\cos(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\,t + \frac{\phi_1 - \phi_2}{2})\cos(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\,t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}) = 2\,U_2\,\cos(\Delta\omega\,t + \frac{\phi_1 - \phi_2}{2})\cos(\omega\,t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2})$, где је $\Delta\omega = (\omega_1 - \omega_2)/2 = 2\,\pi\,\mathrm{Hz}$, а $\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2 = 2\,\pi\cdot 2106\,\mathrm{Hz}$. Дакле, слушалац чује тон фреквенције $2106\,\mathrm{Hz}$, при чему је период између тренутака када амплитуда звучних осцилација $2\,U_2\cos(\Delta\omega\,t + \frac{\phi_1 - \phi_2}{2})$ пада на нулу једнак $T = 0.5\,\mathrm{s}$. Из услова $U_{AB} = U_2$ следи $L = \frac{1}{\omega_1}\sqrt{\left(\frac{U_1^2}{U_2^2} - 1\right)R^2 + \left(\frac{U_1}{U_2\omega_1 C}\right)^2} + \frac{1}{\omega_1^2 C}$. Захтев $U_{AB} = U_2$ можемо испунити само када је поткорена величина у изразу за L позитивна, односно када је $U_1 > U_2\,\frac{R}{\sqrt{R^2 + (1/\omega_1 C)^2}}$. Видимо да напон U_{AB} може бити већи од U_1. Ово повећање напона је могуће због резонантних особина RLC кола, и то не би било могуће постићи отпорничким разделником напона.

4. a) Угао β између нормале на диск и правца под којим се види максимум може бити између $0°$ и $90°$, па његов синус мора бити између 0 и 1. Да би под углом β постојао максимум мора бити задовољено $d\,(\sin\alpha - \sin\beta) = n\lambda$. Највећу таласну дужину ласера за коју је могуће уочити три максимума налазимо када узмемо да се најнижи максимим налази скоро на нултој висини, док се највиши налази готово у бесконачности, а између њих имамо још један максимум. Из услова за ова два екстремна максимума $d\,(\sin\alpha - \sin 0°) = n_1\lambda_{max}$ и $d\,(\sin\alpha - \sin 90°) = n_2\lambda_{max}$ закључујемо $d\,(\sin 90° - \sin 0°) = (n_1 - n_2)\lambda_{max} = 2\lambda_{max} \Rightarrow \lambda_{max} = d/2$. Слично налазимо да је највећа таласна дужина при којој би се већ појавио и четврти дифракциони максимум $\lambda_{min} = d/3$. Ово је уједно и минимална таласна дужина за коју се појављује не више од три максимума. Коначно закључујемо да је $\lambda_{min} < \lambda < \lambda_{max}$, односно $533\,\mathrm{nm} < \lambda < 800\,\mathrm{nm}$.

б) Угао под којим се види централни максимум једнак је упадном углу $\alpha = 30°$. Одатле налазимо да је растојање од застора до тачке у којој ласерски сноп погађа диск једнако $L = h_0 \tan\alpha = h_0/\sqrt{3} \approx 9.81\,\mathrm{cm}$. Угао под којим се види први максимум је $\beta = \arctan(L/h_1) \approx 63°$. Таласна дужина је $\lambda = d(\sin\beta - \sin\alpha) \approx 626\,\mathrm{nm}$. Пошто је $\sin\beta + \lambda/d > 1$, не може бити максимума испод h_1. Са друге стране, $\sin\alpha - \lambda/d \approx 0.11$, па под упадним углом $\gamma = \arcsin(\sin\alpha - \lambda/d) \approx 6.3°$ налазимо први максимум са горње стране. Он ће се налазити на висини $h_{-1} = L\cot\gamma \approx 90\,\mathrm{cm}$. Како је $\sin\gamma - \lambda/d < 0$, са ове стране нема више видљивих максимума јер вредност угла мора бити позитивна да би се максимум видео на заклону.

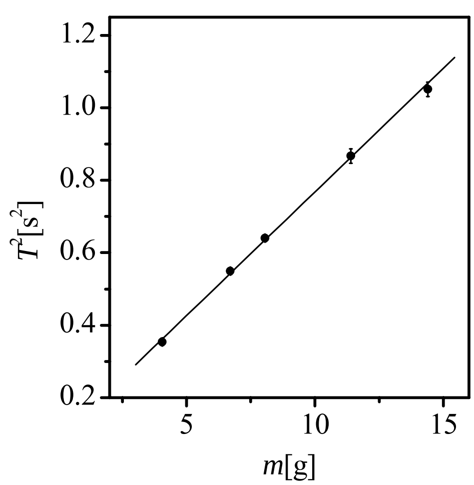
Задатке припремио: Игор Салом
Рецензент: Антун Балаж
Председник комисије: др Мићо Митровић

Савезно такмичење 2004.

Решење експерименталног задатка 1

Мерено је време t потребно да опруга оптерећена масом m направи n осцилација. Период осциловања је $T=\frac{t}{n}$, где је $n=10$ број осцилација. Време t се је одређено из три директна мерења, $t_s=\frac{t_1+t_2+t_3}{3}$, а апсолутна грешка као максимално одступање $\left|t_i-t_s\right|_{max}$. Пошто је $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, из линеарне зависности $T^2=\frac{4\pi^2}{k}m$ може се одредити непозната константа опруге k. Резултати мерења дати су у табели.

	$m[g]$	$t_i[s]$	$t_S[s]$	$\Delta t[s]$	$T=\frac{t}{n}[s]$	$\Delta T=\frac{\Delta t}{n}[s]$	$T^2[s^2]$	$\Delta T^2=2T\Delta T[s^2]$
1	4.05	5.94 6.04 5.92	5.967 5.97	0.073 0.08	0.5967 0.597	0.0073 0.008	0.356 0.36	0.0087 0.01
2	6.70	7.47 7.39 7.37	7.407 7.41	0.063 0.07	0.7407 0.741	0.0063 0.007	0.549 0.55	0.0093 0.01
3	8.05	8.03 8.06 7.91	8.000 8.00	0.090 0.09	0.8000 0.800	0.0090 0.009	0.640 0.64	0.011 0.01
4	11.4	9.31 9.25 9.38	9.313 9.31	0.067 0.07	0.9313 0.931	0.0067 0.007	0.867 0.87	0.012 0.02
5	14.4	10.31 10.20 10.25	10.253 10.25	0.057 0.06	1.0253 1.025	0.0057 0.006	1.051 1.05	0.012 0.02



Са графика $T^2=f(m)$, одређује се коефицијент правца праве избором две нееxпериментaлне тачке, нпр. А$(5.3\text{g};\ 0.45\text{s}^2)$ између прве и друге и В$(12.6\text{g};\ 0.95\text{s}^2)$ између последње и претпоследње експерименталне тачке.

Коефицијент правца се израчунав као:

$$a = \frac{T_{\mathrm{B}}^2 - T_{\mathrm{A}}^2}{m_{\mathrm{B}} - m_{\mathrm{A}}} = \frac{(0.95 - 0.45)\mathrm{s}^2}{(12.6 - 5.3)\mathrm{g}} = 68.5\,\frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{kg}}\,.$$

Релативна грешка се израчунава као $\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta(T^2)_{\mathrm{B}} + \Delta(T^2)_{\mathrm{A}}}{T_{\mathrm{B}}^2 - T_{\mathrm{A}}^2} + \frac{\Delta m_{\mathrm{B}} + \Delta m_{\mathrm{A}}}{m_{\mathrm{B}} - m_{\mathrm{A}}}$

$\frac{\Delta a}{a} = \frac{0.0093 + 0.012}{0.95 - 0.45} + \frac{0.1 + 0.1}{12.6 - 5.3} = 0.07 \Rightarrow \Delta a = 4.8\,\frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{kg}}$, па је $a = (68 \pm 5)\frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{kg}}$.

в) Пошто је $a = \frac{4\pi^2}{k}$, следи да је $k = \frac{4\pi^2}{a} = \frac{4\pi^2}{68.5} = 0.576\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$.

$\frac{\Delta k}{k} = \frac{\Delta a}{a} = \Rightarrow \Delta k = 0.04\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$.

Тражена константа еластичности опруге износи:

$$k = (0.58 \pm 0.04)\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\,.$$

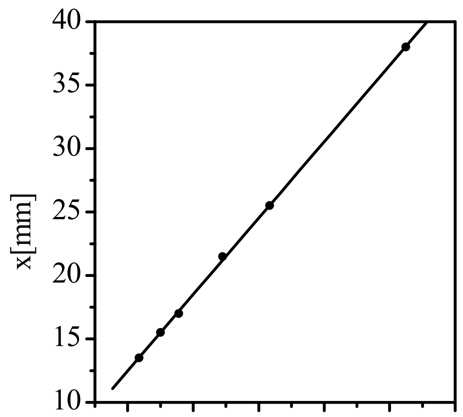
Савезно такмичење 2004.

Решење експерименталног задатка 2

Растојање између нултог максимума и максимума првог реда одређено је формулом $x = \frac{z}{2n} = \lambda L \frac{1}{d}$, где је y мерено растојање између максимума n-тог реда.

$1/d$ [10^4m^{-1}]	6.250	4.167	3.448	2.778	2.500	2.174
z [mm]	76	51	43	34	62	81
n	1	1	1	1	2	3
x [mm]	38.0	25.5	21.5	17.0	15.5	13.5

Процењена грешка мерења растојања крајњих видљивих максимума: Δx = 1 mm.
Растојање решетке и екрана је $L = (0.95 \pm 0.02)\,\mathrm{m}$.
У наведеној зависности $x = f\,(1/d)$, фактор λL представља коефицијент правца праве. Нацртан је график $x = f\,(1/d)$.



Ради израчунавања коефицијента правца праве коришћењем графика, изабране се две неексперименталне тачке са праве, на пример A($2.6\cdot10^4$ m^{-1}, 16 mm) и B($6\cdot10^4$ m^{-1}, 36.6 mm).

Грешке очитавања са графика су $\Delta\left(\frac{1}{d}\right)_A = \Delta\left(\frac{1}{d}\right)_B = 0.02\cdot10^4\,\mathrm{m}^{-1}$.

Дакле, коефицијент правца и његова грешка износе:

$$k = \frac{x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}}{\left(\frac{1}{d}\right)_{\mathrm{B}} - \left(\frac{1}{d}\right)_{\mathrm{A}}} = \frac{(36.6 - 16)\mathrm{mm}}{(6 - 2.6)\cdot 10^{4}\,\mathrm{m}^{-1}} = 6.06\cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}^{2},$$

$$\Delta k = k\cdot\left(\frac{\Delta x_{\mathrm{A}} + \Delta x_{\mathrm{B}}}{x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}} + \frac{\Delta\left(\frac{1}{d}\right)_{\mathrm{A}} + \Delta\left(\frac{1}{d}\right)_{\mathrm{B}}}{\left(\frac{1}{d}\right)_{\mathrm{B}} - \left(\frac{1}{d}\right)_{\mathrm{A}}}\right), \text{ односно}$$

$$\Delta k = 6.06\cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}^{2}\left(\frac{1+1}{36.6-16} + \frac{0.02+0.02}{6-2.6}\right) = 0.66\cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}^{2}.$$

Коефицијент правца износи $k = (6.1 \pm 0.7)\cdot 10^{-7}\ \mathrm{m}^2$.

Из релације $k = L\lambda$, следи да је таласна дужина светлости $\lambda = \frac{k}{L}$, односно

$$\lambda = \frac{6.06\cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}^{2}}{0.95\mathrm{m}} = 6.38\cdot 10^{-7}\,\mathrm{m} = 638\mathrm{nm}$$

а апсолутна грешка $\Delta\lambda = \lambda\cdot\left(\frac{\Delta k}{k} + \frac{\Delta L}{L}\right) = 6.38\cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}\left(\frac{0.66}{6.06} + \frac{0.02}{0.95}\right)$.

Дакле, $\Delta\lambda = 0.83\cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}$.

Тражена вредност таласне дужине износи

$$\lambda = (6.4 \pm 0.9)\cdot 10^{-7}\mathrm{m} = (640 \pm 90)\ \mathrm{nm}.$$