48. РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА ШКОЛСКЕ 2009/2010. ГОДИНЕ.

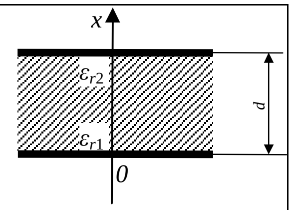
IV РАЗРЕД

Друштво Физичара Србије
Министарство Просвете Републике Србије

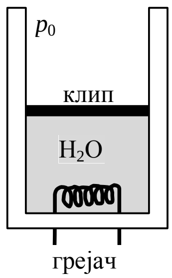
ГИМНАЗИЈА ВЕЉКО ПЕТРОВИЋ, СОМБОР
17.04.2010.

ЗАДАЦИ

1. Простор унутар плочастог кондензатора испуњен је изотропним диелектриком чија релативна диелектрична пропустљивост линеарно расте од ε_{r1} до ε_{r2} у правцу нормалном на плоче кондензатора. Површина сваке плоче је S, а њихово међусобно растојање је d (слика 1). Израчунати капацитет кондензатора. **(20п)**



Слика 1

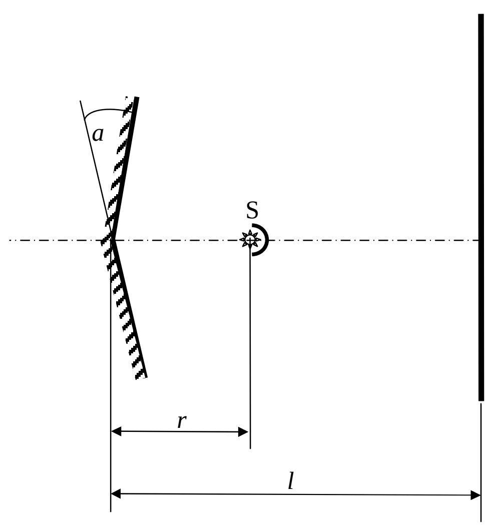


Слика 2

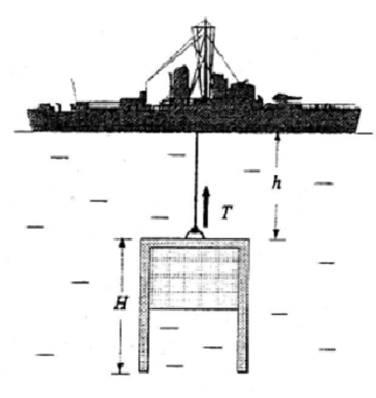
2. Вода масе m=100g је затворена у термички изолованом вертикално постављеном цилиндру (слика 2). Температура воде је θ=20°C. На воду належе клип занемарљиве масе који може да се креће без трења кроз цилиндар. Површина попречног пресека клипа је S=400 cm^2. За колико ће се клип померити у односу на свој првобитни положај ако се води грејачем доведе количина топлоте Q=50kJ. Спољашњи притисак је p_0=1013,2 mbar, а специфична (латентна) топлота испаравања воде је λ=2255,9kJ/kg. Специфични топлотни капацитет воде је c=4,2 kJ/(kgK). Претпоставити да се водена пара може третирати као идеалан гас и да је термално ширење воде занемарљиво. **(16п)**

3. Тачкасти извор светлости S таласне дужине λ =500nm налази се на растојању r = 10 cm од линије пресека два равна огледала која граде мали угао α = 20' (слика 3). Извор S је заклоњен са задње стране тако да светлост не може од њега директно да стигне до заклона, и налази се на симетрали угла који граде огледала и која је нормална на заклон. Одредити укупан број светлих интерференционих трака које ће се добити на екрану удаљеном од линије пресека l = 190 cm. **(18п)**

4. Ронилачко звоно (кесон), цилиндричног облика висине H=4m и унутрашње површине основе S=2m^2, има масу од m=12t. Звоно се спушта на дубину од h=17,2 m (слика 4) са отвором наниже. Колика је сила T која затеже танко уже помоћу којег је звоно прикачено за брод? Зидови звона су танки, а температура ваздуха се не мења при спуштању звона. Звоно је од материјала густине ρ_z=8·10^3 kg/m^3. Атмосферски притисак је p_0=10^5 Pa, $g = 9{,}81$ m/s. **(16п)**



Слика 3



Слика 4

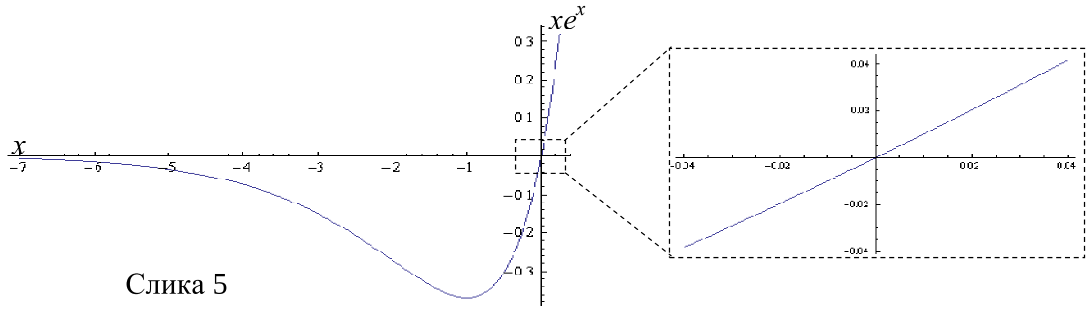
5. У табели су дати резултати мерења емисионе моћи E апсолутно црног тела у зависности од таласне дужине λ. Емисиона моћ је мерена на одређеној температури T.

а) Нацртати график зависности емисионе моћи од таласне дужине **(2п)** **Није потребно уцртавати грешке!**

б) Погодним методом одредити таласну дужину λ_{max} максимума зрачења, и емисиону моћ E_{max} на тој таласној дужини. **Није потребно процењивати грешке! (9п)**

λ[μm]	$E(\lambda,T)$ [10^7W/m^3]
2,8	0,0078834
4	0,226138
5,1	0,891662
6,3	1,85971
7	2,35152
8,3	2,93497
11	2,96577
12	2,76074
13,7	2,33755
15,8	1,82472
18	1,37809
20	1,06226
22	0,82029
24	0,636707
26	0,497626
28	0,391936
30	0,311173

в) Планков закон зрачења даје аналитички облик зависности емисионе моћи апсолутно црног тела у функцији од таласне дужине зрачења, на одређеној температури. По том закону емисиона моћ је сразмерна функцији $u(\lambda,T)=\dfrac{8\pi hc}{\lambda^5}\dfrac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}}-1}$ која у ствари представља функцију расподеле интензитета зрачења по таласним дужинама, апсолутно црног тела. У овом делу задатка, на основу дате једначине за спектралну расподелу зрачења, одредити Винову константу, а за тим на основу добијене вредности и вредности за λ_{max} добијене у б) наћи температуру апсолутно црног тела на којој је мерење вршено. Приликом рачуна сматрати да се функција $f(x)=xe^x$, (слика 5), може апроксимирати правом линијом у близини нуле (увећани део на слици 5). **Није потребно процењивати грешке! (12п)**



Слика 5

г) Израчунати укупну емисиону моћ овог апсолутно црног тела; Штефан Болцманова константа је $\sigma=5{,}67\cdot10^{-8}\,\mathrm{Wm^{-2}K^{-4}}$ **Није потребно процењивати грешке! (1п)**

д) Наћи укупну емисиону моћ и погодним графичким методом. Претпостављајући да је израчуната вредност из претходног дела задатка (г) далеко тачнија, проценити релативну грешку која се прави графичким методом **(6п)**

(укупно 30п)

Задатке припремио: *мр Александар Крмпот*, Институт за физику, Београд

Рецензент: *др Ђорђе Спасојевић*, Физички факултет, Београд

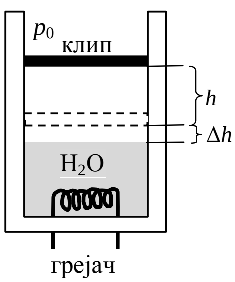
Председник Комисије за такмичење ДФС: *Проф. др Мићо Митровић*, Физички факултет, Београд

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

1. Нека је x оса усмерена као на слици 1. Релативна диелектрична пропустљивост линеарно расте дуж ње по закону $\varepsilon_r(x) = \varepsilon_{r1} + \frac{\varepsilon_{r2} - \varepsilon_{r1}}{d} x$ **(5п)**. Електрично поље између плоча кондензатора је $E(x) = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r(x) S} = \frac{Q}{\varepsilon_0 \left(\varepsilon_{r1} + \frac{\varepsilon_{r2} - \varepsilon_{r1}}{d} x \right) S}$ **(3п)**, где је Q наелектрисање кондензатора. Одавде је

$$U = \int_{x=0}^{x=d} E(x) dx = \int_0^d \frac{Q dx}{\varepsilon_0 \left(\varepsilon_{r1} + \frac{\varepsilon_{r2} - \varepsilon_{r1}}{d} x \right) S} = \frac{Qd}{\varepsilon_0 \left(\varepsilon_{r2} - \varepsilon_{r1} \right) S} \ln\left(\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} \right)$$ **(4+5п)** напон на кондензатору, те је

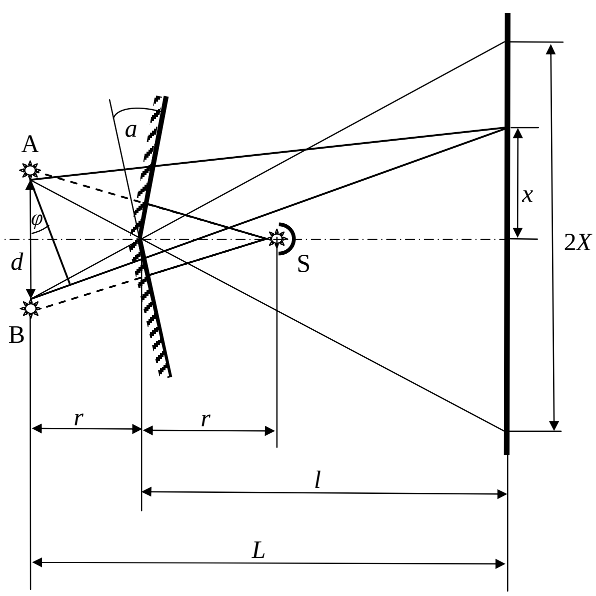
капацитет кондензатора $C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon_0 S (\varepsilon_{r2} - \varepsilon_{r1})}{d \ln\left(\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} \right)}$ **(3п)**



Слика 2

2.Обзиром да је маса воде m=100g, а почетна температура θ=20°C, количина топлоте потребна да се води повиси температура за $\Delta\theta$ = 80K до тачке кључања је $mc\Delta\theta = 33,6\,\text{kJ}$. Стога је јасно да ће при довођењу количине топлоте Q=50kJ вода испод клипа прокључати, а да се остатак топлоте $Q' = Q - mc\Delta\theta$ =50kJ-33,6kJ=16,4kJ троши на испаравање воде **(3п)**. Маса воде која ће да испари је $m_p = \frac{Q'}{\lambda} = \frac{Q - mc\Delta\theta}{\lambda} = 7,27\,\text{g}$ **(2п)**. Због испаравања се ниво воде у суду смањује за $\Delta h = \frac{m_p}{\rho S} = 0,18\,\text{mm}$ **(3п)**. Запремина водене паре је $V_p = \frac{m_p RT}{Mp}$ **(2п)**, где је $M = 18\,\text{g/mol}$ **(1п)** моларна маса воде, а $T = 373,15\,\text{K}$ (апсолутна) температура кључања воде. То значи да ће висина стуба водене паре износити V_p / S, **(2п)** те је висина за коју се клип диже $h = V_p / S - \Delta h = 30,9\,\text{cm}$ **(3п)**.

3. Интеференциону слику која се добија на екрану стварају два имагинарна лика A и B извора S. Они се понашају као извори у Јунговом интерференционом огледу **(2п)**. Растојање између A и B износи $d = 2r \sin\alpha \approx 2r\alpha = 1,16\,\text{mm}$ **(2п)**, где је $\alpha = 20' = \frac{\pi}{180} \cdot 20\,\text{rad}$ = 0,005818 rad **(1п)** угао између огледала изражен у радијанима. Уочимо да се интерференција јавља само на оном делу екрана на који пада светлост из оба лика A и B. Са слике се види да ширина тог дела екрана износи $2X$, где

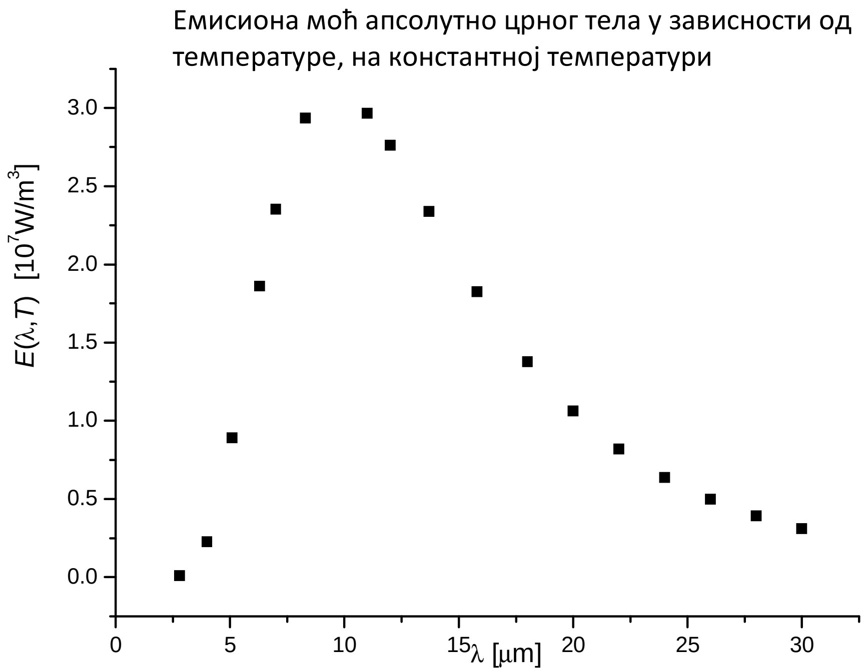


Слика 3

је $X = l \cdot tg\alpha \approx l\alpha = 11{,}05\,\mathrm{mm}$ **(2п)**. Путна разлика између зрака који долазе из А и В је $\Delta s = d \cdot \sin\varphi \approx d \cdot tg\varphi = \frac{xd}{L}$ **(2п)**, где је $L = l + r$ растојање од извора до екрана, док је x положај тачке посматрања у односу на центар интерференционе слике. Интерeференциони максимуми се добијају за $\Delta s = n\lambda$ **(1п)**, те је $x_n = n\lambda \frac{L}{d}$ **(1п)** координата n-тог максимума ($n = 0, \pm 1, \pm 2, ..$). Растојање између два суседна максимума је $\Delta x = \lambda \frac{L}{d} = 0{,}862\,\mathrm{mm}$ **(2п)**, те се у горњем делу екрана види $\left[\frac{X}{\Delta x}\right] = [12{,}86] = 12$ максимума **(2п)**. Исто толико максимума се види и у доњем делу екрана, што заједно са централним максимумом даје $N = 25$ **(3п)**.

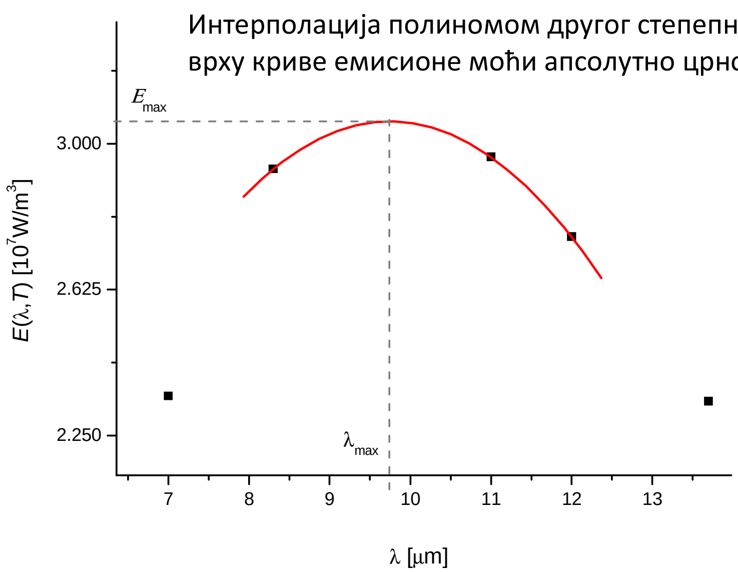
4. Ако је x висина ваздушног стуба у звону, онда је притисак ваздуха у стубу $p = p_0 + \rho_v g(h + x)$ **(3п)**. Пошто се температура ваздуха током спуштања звона не мења, процес је изотермски па је $p_0 SH = \left[p_0 + \rho_v g(h + x)\right] Sx$ **(2п)**. Тако добијамо квадратну једначину по x коју је погодно написати у облику $x^2 + \left(h + h_v\right)x - h_v H = 0$ **(3п)**, где је $h_v = \frac{p_0}{\rho_v g} = 10{,}19\,\mathrm{m}$ дубина на којој је притисак воде једнак атмосферском притиску. Једно решење ове једначине је негативно и нема физичког смисла. Друго решење је $x = \left(\sqrt{\left(h + h_v\right)^2 + 4h_v H} - \left(h + h_v\right)\right) / 2 = 1{,}415\,\mathrm{m}$ **(2п)**. Звоно и ваздушни стуб можемо сматрати за једно тело запремине $V = M / \rho_z + Sx = 4{,}276\,\mathrm{m}^3$ **(3п)**, те се сила затезања ужета $T = Mg - \rho_v Vg = 76\,\mathrm{kN}$ **(3п)** добија када се од тежине звона Mg одузме тежина истиснуте воде $\rho_v Vg$.

5. а)



(2п)

б) Погодан начин за одређивање λ_{max} и E_{max} је да се сам врх криве апроксимира квадратном параболом **(1п)**. То се може урадити тако што се узму три тачке са највећом емисионом моћи и кроз њих „провуче“ парабола (види наредну слику), тачније речено те три тачке се интерполирају полиномом другог степена. Парабола је у потпуности одређена са три тачке, тако да ће све три одабране тачке лежати на параболи.



Општа једначина параболе је $E = a\lambda^2 + b\lambda + c$ (1). Пошто све три тачке леже на праболи то значи да њихове λ и E координате задовољавају претходну једначину. Увршћавањем три пара координата у једначину праболе добија се систем од три једначине са три непознате a, b и c :

$$\left.\begin{array}{ll} 2,93497\cdot 10^7 = 8,3^2 a + 8,3b + c & (2) \\ 2,96577\cdot 10^7 = 11^2 a + 11b + c & (3) \\ 2,76074\cdot 10^7 = 12^2 a + 12b + c & (4) \end{array}\right\} \quad \begin{array}{ll} a = -0,0584966\cdot 10^7\,\mathrm{W/m^5} & (5) \\ b = 1,14039\cdot 10^7\,\mathrm{W/m^4} & (6) \\ c = -2,50045\cdot 10^7\,\mathrm{W/m^3} & (7) \end{array} \quad \textbf{(4п)}$$

Сада је једначина параболе $E = -0,0584966\cdot 10^7 \lambda^2 + 1,14039\cdot 10^7 \lambda - 2,50045\cdot 10^7$ па се могу одредити параметри њеног темена, што представља тражене величине:

$$\lambda_{\max} = -\frac{b}{2a} = 9,43\mu\mathrm{m} \quad (10) \quad \textbf{(2п)}$$

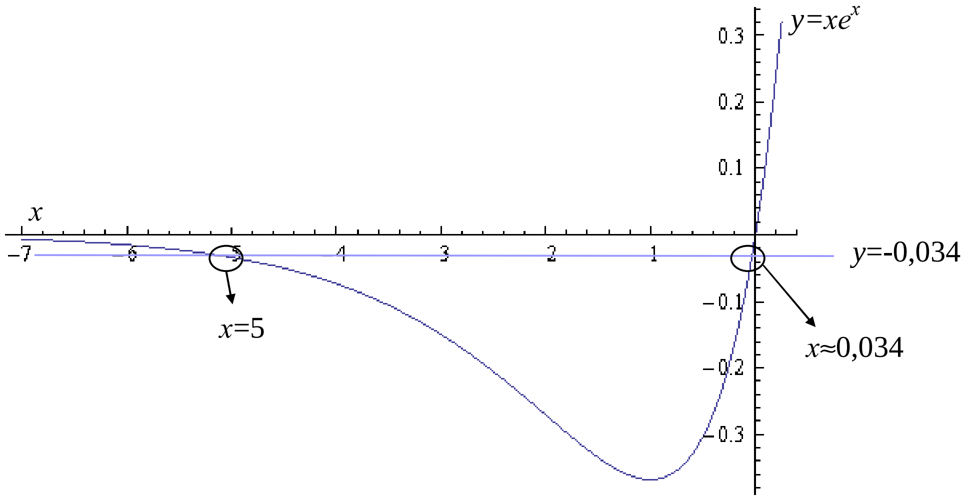
$$E_{\max} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = 3,102\mathrm{W/m^3} \quad (11) \quad \textbf{(2п)}$$

в) Према Виновом закону производ темепратуре апсолутно црног тела и таласне дужине максимума спектралне расподеле зрачења је константан. Да би се аналитички одредио максимум спектралне расподеле зрачења, потребно је наћи први извод функције $u(\lambda,T) = \dfrac{8\pi hc}{\lambda^5}\dfrac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}$ (12) и изједначити га са нулом

$$\frac{du(\lambda,T)}{d\lambda} = \frac{8ch\pi\left(ce^{\frac{ch}{kT\lambda}}h - 5\left(-1 + e^{\frac{ch}{kT\lambda}}\right)kT\lambda\right)}{\left(-1 + e^{\frac{ch}{kT\lambda}}\right)^2 kT\lambda^7} = 0 \quad (13) \quad \textbf{(2п)}$$

Следи да је $\dfrac{hc}{kT\lambda}e^{\frac{hc}{kT\lambda}} - 5\left(e^{\frac{hc}{kT\lambda}} - 1\right) = 0$ **(0,5п)** (14). Ако се уведе смена $\dfrac{hc}{kT\lambda} = q$ (15) добија се једначина $qe^q = 5\left(e^q - 1\right)$ (16) **(1,5п)**, односно $(q-5)e^q = -5$ (17). Јасно је да q мора бити позитивно (све величине у (15) су позитивне), а из једначине (17) се види и да мора бити мање од пет, дакле 0<q≤5 (18) **(0,5п)**. Из (17) се такође уочава да је једно решење q=0 (19), али то је тривијално решење и нема физичког смисла јер не испуњава услов (18).

Да бисмо нашли друго - нетривијално решење једначине (17) помножимо целу једначину са e^{-5}. Тако се добија $(q-5)e^{q-5} = -5e^{-5}$ (20) **(1п)**. Уводећи смену $(q-5) = x$ (21), једначина (20) добија облик $xe^x = -5e^{-5} \approx -0,034$ (22) **(1,5п)**. Решења једначине (22) представљају тачке пресека криве xe^x и праве паралелне x оси која се налази на -0,034 (слика)



Једно решење смо већ одредили у (19); за њега је x=5 (23), али као што је већ речено то је тривијално и физички неприхватљиво решење. Друго решење се налази у близини нуле где можемо искористити апроксимацију $xe^x \approx x$ (24) дату у поставци задатка. Тако налазимо x≈0,034 (25) **(2п)**, па је q=5-0,034=4,966 (26).

Враћањем смене (15) добија се да је $\lambda_{\max} T = \dfrac{hc}{kq} = 2{,}898 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{mK}$ **(1,5п)** (27), одакле је температура апсолутно црног тела $T = 2{,}898 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{mK}/\lambda_{\max} = 297\,\mathrm{K}$ (28). **(1,5п)**

г) Користећи нађену температуру и дату вредност Штефан Болцманове констате израчунавамо да је укупна емисиона моћ $E_T = \sigma T^4 = 441\,\mathrm{W/m^2}$ (29) **(1п)**.

д) Да би се нашла укупна емисиона моћ апсолутно црног тела треба одредити површину испод криве емисионе моћи у зависности од таласне дужине. То се може постићи тако што се споје све тачке правим линијама и онда нађе површина испод ове изломљене линије. Један начин да се одреди површина испод изломљене линије је да се срачуна укупна површина трапеза испод ове линије. Други (једноставнији, али нешто мање тачан) начин је да се на милиметарском папиру изброје квадратићи испод изломљене линије, па се њихов број помножи са површином једног квадратића. Како је број квадратића на слици 1552, а површина једног квадратића 0,25W/m^2, то је укупна емисиона моћ $E_T = 1552 \cdot 0.25\,\mathrm{W/m^2} = 388\,\mathrm{W/m^2}$ **(5п)**

Релативна грешка графичког метода је $\delta = \dfrac{\left|E_T^{rac} - E_T^{graf}\right|}{E_T^{rac}} = \dfrac{\left|441\,\mathrm{W/m^2} - 388\,\mathrm{W/m^2}\right|}{441\,\mathrm{W/m^2}} = 0{,}12 = 12\%$ **(1п)**

Емисиона моћ апсолутно црног тела у зависности од температуре, на температури 297К, са мрежом погодном за одређивање површине испод криве