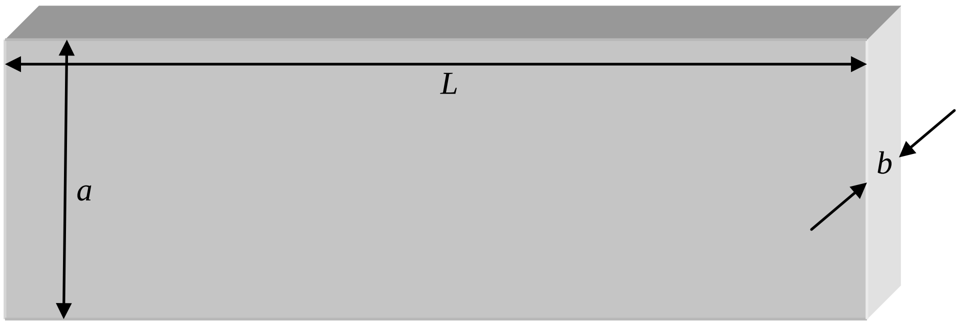
САВИЈАЊЕ ЕЛАСТИЧНЕ ПЛОЧЕ

Циљ експеримента:

Савијање еластичне плоче је један од могућих модова њених деформација. Када се плоча савије па препусти самој себи, она почне да осцилује. Услед губитка енергије осцилације су пригушене. **Основни циљ експеримента** је да се из измереног периода и пригушења осцилација **одреде модул еластичности** E и **параметар** ε **еластичног хистерезиса** материјала од којег је плоча направљена.

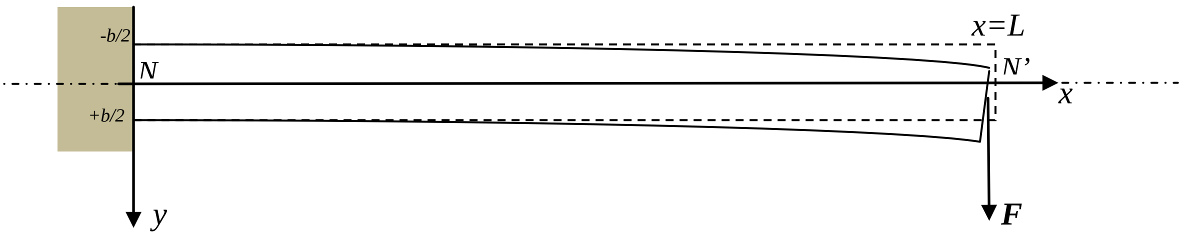
Теоријски увод:

Нека (недеформисана) плоча има облик квадра дужине L, ширине a и дебљине b ($b < a < L$) – слика 1.



Слика 1.

Нека је ова плоча на једном крају (основом нормалном на дужину) учвршћена – слика 2, док је други крај плоче слободан.[1] Дуж NN' представља раван симетрије плоче нормалну на дебљину b.



Слика 2.

Плоча се савија силом $\boldsymbol{F}$ која делује на њен слободни крај, паралелно дебљини b. Дужи паралелне ширини плоче остају такве и не деформишу се. Дужи паралелне дужини плоче се криве и мењају дужину. Изузетак су дужи из равни NN' које се само криве, али не мењају дужину. Стога се за линију NN' каже да је ***неутрална***. Коначно, дужи паралелне висини плоче не мењају дужину, али мењају правац остајући нормалне на неутралну линију.

[1] Слика 2 се добија када се плоча са слике 1 гледа „одозго“. Раван цртежа слике 2 је нормална на ширину плоче и сече је по средини; пресек је правоугаоник страница L и b.

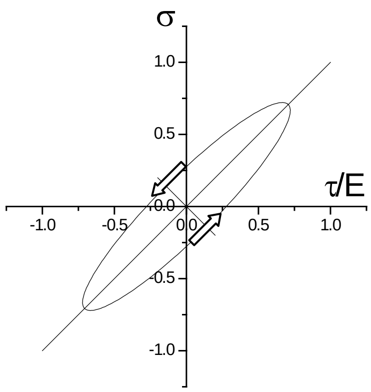
Уведимо x координату дуж неутралне линије пре савијања, y координату усмеримо дуж силе $\boldsymbol{F}$ која изазива савијање, а координатни почетак поставимо у тачку N – слика 2. У овом систему координата једначина неутралне линије (види додатак) при малим деформацијама гласи

$$y(x) = \frac{6F}{Eab^3} x^2 \left(L - \frac{x}{3} \right)$$

одакле померање y краја плоче ($x = L$) под дејством силе F износи

$$y = \frac{4L^3}{Eab^3} F \ .$$

Нека је на крај плоче причвршћена маса M знатно већа од масе плоче. Када се маса изведе из равнотежног положаја померањем у **хоризонталној** равни и пусти, јавиће се пригушене осцилације. Пригушење настаје првенствено услед еластичног хистерезиса у материјалу плоче.



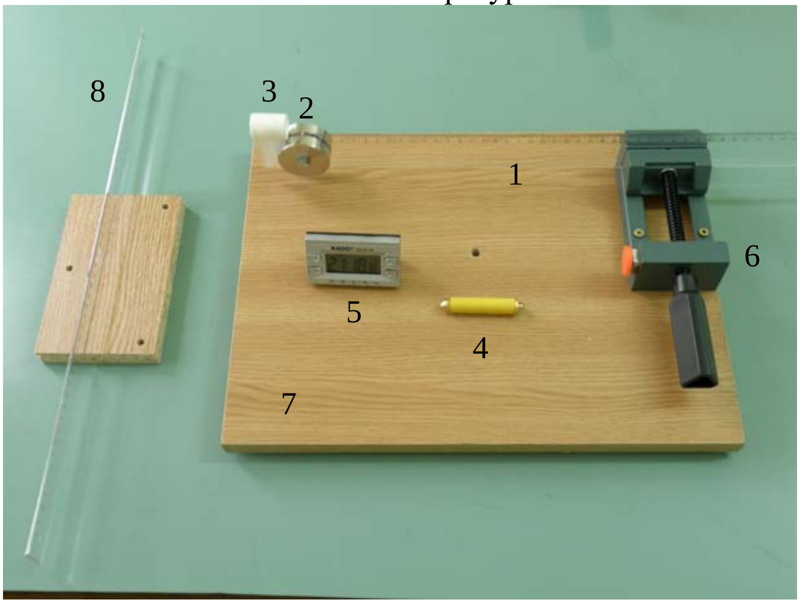
За идеално еластичан материјал релативна деформација је једнака количнику тангенцијалног напона и модула еластичности; $\sigma = \tau / E$ и график је права линија. За реалне материјале σ касни, те се јавља хистерезисна петља – слика лево. Када се деформација и напон мењају **хармонијски** петља је елипса. Величина:

$$\varepsilon = \frac{\text{mala osa}}{\text{velika osa}}$$

је параметар хистерезиса који зависи од фреквенције. Површина оивичена елипсом одговара енергијским губицима услед хистерезиса током једног циклуса.

<u>Опис апаратуре:</u>

Слика 3. Апаратура

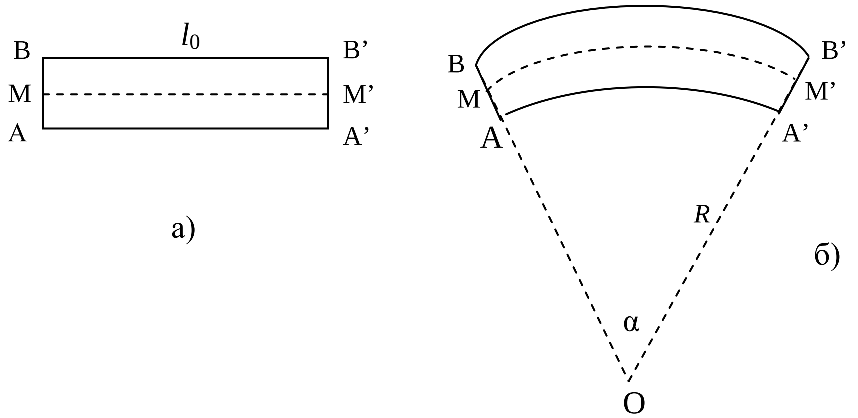


Апаратура (слика 3) се састоји из: пластичног лењира (1), причвршћене масе (2) – узети вредност од техничког сарадника, постоља за ласер (3), ласера (4), дигиталног хронометра (5), стеге (6), постоља (7) и лењира за очитавање ласерског спота (8). Поред овога на располагању су: и метарска трака, нонијус и микрометар.

Задатак: (носи укупно 100 поена; поени за сваки део задатка су дати у угластим заградама)

1) Измерити параметре лењира: ширину a и дебљину b. Ради једноставнијег приступа занемарити сужења дебљине лењира дуж скале, тј сматрати да је лењир квадар. Прикачена маса: $M = (282,1 \pm 0,1)\,\mathrm{g}$ **[10]**
2) Написати једначину осциловања масе M занемарујући пригушење. **[5]**
3) Написати формулу која описује зависност периода осциловања T од дужине L дела лењира између стеге и масе M. **[5]**
4) Објасните како се из измерене зависности периода осциловања T од дужине L може одредити модул еластичности пластике од које је лењир направљен и како се може проценити максимална апсолутна грешка тако одређене величине. **[5]**
5) Измерити период осциловања T за неколико дужина L. Мерења вршити у интервалу 250mm < L < 400mm. Резултате мерења приказати табеларно и графички. На основу графика одредити модул еластичности. Проценити апсолутну грешку. **[30]**
6) Написати једначину пригушених осцилација при малом параметру хистерезиса $\varepsilon \ll 1$. **[15]**
7) Објаснити како се мерењем пригушења амплитуда може одредити параметар хистерезиса ε. **[5]**
8) Измерити параметар хистерезиса ε фреквенцију која се јавља при $L = 415\,\mathrm{mm}$. Поставити заклон за праћење ласерског зрака на растојање око 1m од ласера. Затим укључити ласер уз помоћ техничког сарадника. Повлачењем монтиране масе савити лењир тако да се ласерски сноп помери за 8-10cm. Ово померање је пропорционално почетној амплитуди. Пустити систем да осцилује и измерити амплитуду A_2 након $n = 2$ осцилације. Понављати процедуру при **истој почетној амплитуди**, те редом измерити амплитуде A_4, A_6, A_8, … Након завршетка мерења обавезно искључити ласер. Резултате мерења приказати табеларно и графички. На основу графика одредити параметар хистерезиса ε. Због обимности задатка није потребно одређивати грешке. **[25]**

Додатак: (није га неопходно прочитати за успешну реализацију експеримента)



Слика 4.

Једначину неутралне линије налазимо на следећи начин. Уочимо пре савијања делић између два попречна пресека плоче AB и $A'B'$ – слика 4а; растојање l_0 између пресека је веома мала величина, а *MM'* део неутралне линије између пресека. Облик делића након савијања је дат на слици 4б – то је исечак цилиндричног слоја дебљине b, висине a, средњег полупречника R и угла исечка α (α је мали угао); центар слоја је тачка O. Уочимо да је R полупречник, а O центар **кривине** за сегмент *MM'* неутралне линије. Вреди $l_0 = R\alpha$ јер је лук *MM'* део неутралне линије. Уведимо координату ρ коју меримо M од ка B; тачки A одговара $\rho=-b/2$, тачки M $\rho=0$, а тачки B $\rho=+b/2$. Уочимо пре савијања дуж са координатом ρ, паралелну неутралној линији; њена дужина је l_0. Након савијања ова дуж постаје лук полупречника $R+\rho$ и дужине $l=(R+\rho)\alpha$ обзиром да се ρ услед савијања не мења. Стога је $\Delta l=l-l_0=\rho\alpha$ апсолутно, а $\Delta l/l_0=\rho\alpha/R$ релативно истезање, те се на на крајевима ове линије јавља напон $\tau=E\Delta l/l_0=E\rho/R$, где је E модул еластичности. Укупну еластичну силу F_e на пресеку AB налазимо интеграцијом напона τ по попречном пресеку: $F_e = \int \tau dS = \int_{-b/2}^{b/2} E\frac{\rho}{R} a d\rho = 0$. Укупни момент силе који ствара описана расподела еластичних напона износи $M_e = \int \rho\tau dS = \frac{Ea}{R}\int_{-b/2}^{b/2}\rho^2 d\rho = \frac{Eab^3}{12R}$ и, обзиром да је $F_e = 0$, не зависи од избора пола у односу на који се рачуна. У x-y систему координата, полупречник кривине R је $\frac{1}{R} = \frac{y''}{\left(1+y'^2\right)^{3/2}}$, где су y' и y'' први и други извод по x једначине неутралне линије $y = y(x)$. За мале деформације је $R \approx 1/y''$, тако да је $M_e \approx \frac{Eab^3}{12}y''$. Уочимо сада део плоче од попречног пресека са x координатом па до краја плоче. На крају плоче делује сила F, а на попречном пресеку еластични напони настали деловањем дела плоче од почетка плоче до уоченог попречног пресека. Како су деформације мале, x компоненте дају резултанту $F_e = 0$ чији је момент M_e, док y компоненте напона дају силу F' која уравнотежава силу F и са њом образује спрег сила са моментом $\left(L-x\right)F$ који уравнотежава еластични момент M_e. Тако налазимо $y'' = \frac{12F}{Eab^3}\left(L-x\right)$. Двоструком интеграцијом ове диференцијалне једначине, коришћењем услова $y(0)=0$ и $y'(0)=0$, добијамо $y(x) = \frac{6F}{Eab^3}x^2\left(L-\frac{x}{3}\right)$, што је тражена једначина неутралне линије савијене плоче.

Припремио: *др Ђорђе Спасојевић,* Физички факултет, Београд

Председник Комисије за такмичење ДФС: *др Мићо Митровић,* Физички факултет, Београд

ОПШТА ГРУПА
СРЕДЊЕ ШКОЛЕ

Друштво Физичара Србије
Министарство Просвете Републике Србије
РЕШЕЊЕ ЕКСПЕРИМЕНТАЛНОГ ЗАДАТКА

Физички факултет, Београд, 5.05.2010.

1) Ширину лењира мерити нонијусом (тачност 0,02mm), а дебљину микрометром (тачност 0,01mm). Мерења ширине и дебљине извршити на више места распоређених (приближно) равномерно по целом лењиру. За мерне вредности узети средње вредности. За апсолутне грешке узети максимална одступања од средње вредности (односно тачност мерног инструмента ако је максимално одступање мање). Следе резултати мерења добијених на тест апаратури.

   Маса: $M = (282{,}1 \pm 0{,}1)\,\mathrm{g}$

   Ширина: (мерено нонијусом тачности 0,02mm)

a [mm]	42,06	42,04	42,14	42,18	42.08

   a=(42,10±0,08) mm **[5]**

   Дебљина: (мерено микрометром тачности 0,01mm)

b [mm]	3,13	3,05	3,07	3,14	3,12

   b=(3,10±0,05)mm **[5]**

2) Када је плоча савијена на причвршћену масу делује сила $F = \dfrac{Eab^3}{4L^3}y$ која се јавља услед еластичних напона у плочи и која игра улогу реституционе силе за кретање масе M. Стога једначина осциловања масе гласи:

$$M \cdot \ddot{y} = -\frac{Eab^3}{4L^3}y$$

3) На основу претходне једначине угаона фреквенција осцилација износи $\omega = \sqrt{\dfrac{Eab^3}{4ML^3}}$, **[2]**

   одакле је период $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ једнак

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{4ML^3}{Eab^3}} \quad [3]$$

4) Квадрат периода је линеарна функција куба дужине:

$$T^2 = \frac{16\pi^2 M}{Eab^3}L^3 \quad [1]$$

   Нагиб ове праве је $k = \dfrac{16\pi^2 M}{Eab^3}$, одакле је модул еластичности

$$E = \frac{16\pi^2 M}{kab^3} \quad [2]$$

а његова максимална апсолутна грешка

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta M}{M} + \frac{\Delta k}{k} + \frac{\Delta a}{a} + 3\frac{\Delta b}{b} \quad [2]$$

5) Мерења је потребно извршити за најмање 6 парова вредности L и T.

Мерења дужине L су вршена метарском траком тачности 1mm; стога је узето $\Delta L = 1\,\mathrm{mm}$.

Мерења периода T су вршена тако што је за сваку дужину по 3 пута мерено трајање 10 осцилација t_{10}. Ова трајања су мерена дигиталним хронометром номиналне тачности 0,01s. Обзиром да се хронометар укључује и искључује ручно, грешка Δt_{10} појединачног мерења величине t_{10} је, због нерепродуцибилности рефлекса, већа од номиналне тачности хронометра. Процењено је да је грешка појединачног мерења 0,05s.

За мерну вредност величине t_{10} је узимана средња вредност 3 измерене вредности трајања 10 осцилација, а за њену апсолутну грешку Δt_{10} максимално одступање од средње вредности, односно грешка појадиначног мерења када је већа од максималног одступања.

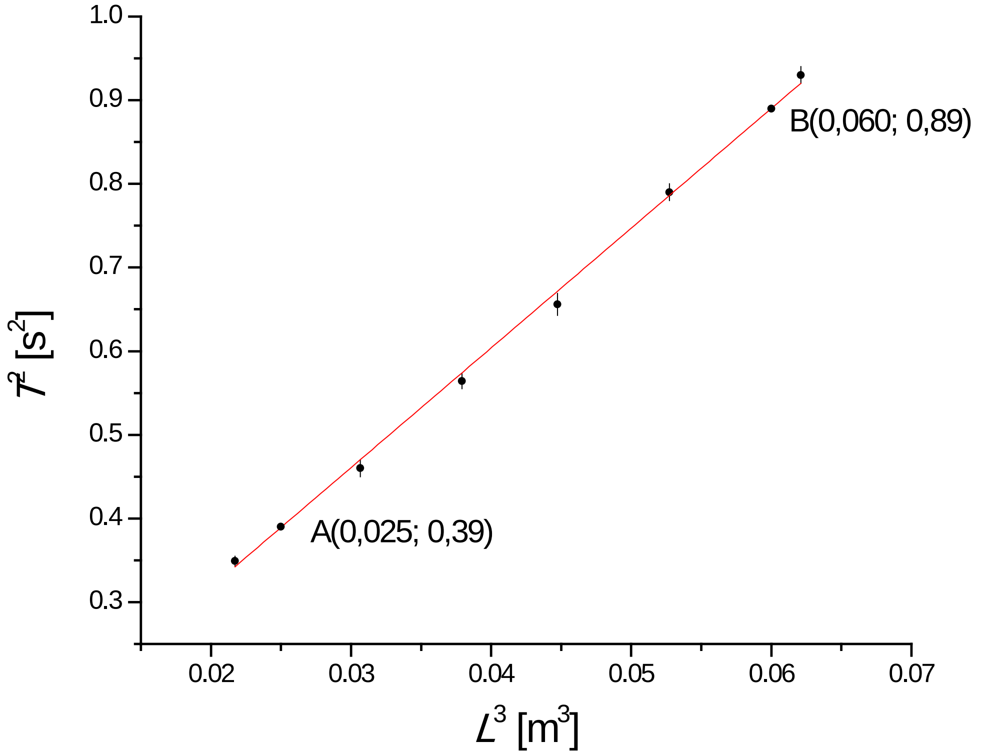
Реултати мерења су приказани у табели 1. Последње две колоне табеле садрже податке потребне за линеаризацију графика.

Табела 1 **[15]**

L [m]	t_{10}^i [s]	t_{10} [s]	Δt_{10} [s]	T [s]	ΔT [s]	L^3 [m^3]	T^2 [s^2]	ΔT^2 [s^2]
0,396	9,64	9,65	0,05	0,965	0,005	0,0621	0,93	0,01
	9,62							
	9,69							
0,375	8,96	8,90	0,06	0,890	0,006	0,05273	0,79	0,01
	8,84							
	8,90							
0,355	8,11	8,10	0,08	0,810	0,008	0,04474	0,656	0,013
	8,17							
	8,02							
0,336	7,47	7,51	0,06	0,751	0,006	0,03793	0,564	0,009
	7,57							
	7,49							
0,313	6,89	6,82	0,07	0,682	0,007	0,03066	0,46	0,01
	6,77							
	6,80							
0,279	5,92	5,91	0,05	0,591	0,005	0,02172	0,349	0,006
	5,88							
	5,93							

Грешке: $\Delta T = \Delta t_{10}/10$, $\Delta\left(L^3\right) = 3L^2\Delta L$, $\Delta\left(T^2\right) = 2T\Delta T$.

На слици 5 је дат график зависности квадрата периода (T^2) у функцији куба дужине (L^3). **[10]**



Слика 5: зависност квадрата периода (T^2) у функцији куба дужине (L^3)

Уцртана је најбоља права и изабране тачке A и B из којих одређујемо нагиб k. Апсолутну грешку рачунамо из:

$$\frac{\Delta k}{k} \approx \frac{\Delta y_{\mathrm{A}} + \Delta y_{\mathrm{B}}}{|y_{\mathrm{A}} - y_{\mathrm{B}}|} = \frac{0,01+0,01}{|0,39-0,89|} = 0,04 \ \textbf{[1]}$$

тако да коначно налазимо:

$$k = (14,3 \pm 0,6)\frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{m}^3} \ .\textbf{[2]}$$

Уз помоћ ове вредности налазимо:

$$E = (2,5 \pm 0,3)\cdot 10^9\,\mathrm{Pa} \ . \textbf{[2]}$$

6) Нека је ξ координата дуж велике, а η координата дуж мале осе елипсе. При хармонијском кретању ове величине се мењају по закону

$$\xi = A\cos\omega t \ \text{ и } \ \eta = \varepsilon A \sin\omega t \ . \textbf{[3]}$$

Нека је $x = \tau / E$ и $y = \sigma$. Важи $x = \dfrac{\xi - \eta}{\sqrt{2}}$ и $y = \dfrac{\xi + \eta}{\sqrt{2}}$ **[3]**. Одавде је при $\varepsilon \ll 1$

$$x \approx y + 2\frac{\varepsilon}{\omega}\dot{y} \ \textbf{[3]}$$

Сада на основу пропорционалности закључујемо да је сила

$$F \approx M\omega_0^2\left(y + 2\frac{\varepsilon}{\omega}\dot{y}\right) \ \textbf{[3]}$$

одакле се види да једначина осциловања приближно гласи

$$\ddot{y} + 2\varepsilon\omega_0\dot{y} + \omega_0^2 y = 0 \ \textbf{[3]}$$

што претставља једначину пригушених осцилација.

7) Током пригушених осцилација амплитуда се експоненцијално смањује $A(t) = A_0 e^{-\beta t}$ **[1]**, где је $\beta = \varepsilon\omega_0$. Стога је n-та амплитуда ($t_n = nT = 2\pi n / \omega_0$)

$$A_n = A_0 e^{-2\pi\varepsilon n} \ \textbf{[2]}$$

То значи да се снимањем A_n у функцији од n и линеаризацијом

$$\ln A_n = \ln A_0 - \left(2\pi\varepsilon\right) n \ \textbf{[2]}$$

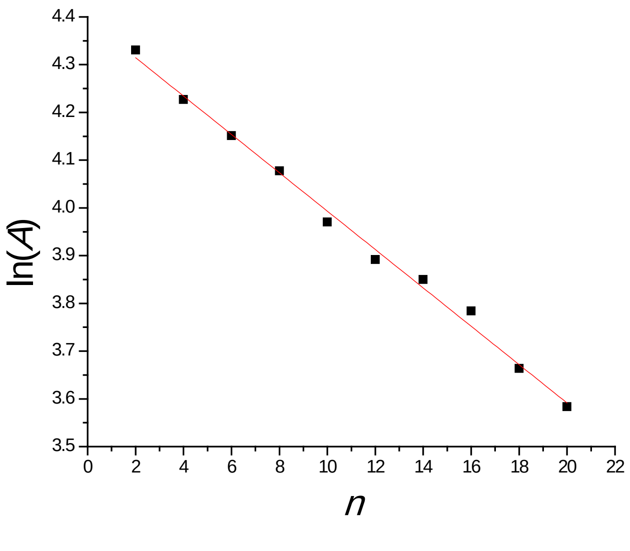
параметар хистерезиса ε може одредити и коефицијента правца ове линеаризоване зависности.

8) Извршити мерења за најмање 6 амплитуда. Мерење сваке амплитуде вршити барем 3 пута. Резултати мерења су дати у табели 2. У табелу су ради једноставности унете само средње вредности амплитуда а не и појединачна мерења.

Табела 2. Амплитуда осцилација у функцији n. Почетна амплитуда је $A_0 = 85$ mm. **[15]**

n	A [mm]	ln(A)
2	76	4.33073
4	68.5	4.22683
6	63.5	4.15104
8	59	4.07754
10	53	3.97029
12	49	3.89182
14	47	3.85015
16	44	3.78419
18	39	3.66356
20	36	3.58352

График линеаризоване зависности је дат на слици 6. **[8]**



Коефицијент правца $k' = -2\pi\varepsilon$ најбоље праве износи -0,0402, одакле је

$$\varepsilon = 0,0064 \ . \ \textbf{[2]}$$