ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА
ШКОЛСКЕ 2013/2014. ГОДИНЕ.

Друштво физичара Србије
Министарство просвете Републике Србије
ЗАДАЦИ – бозонска категорија

III РАЗРЕД

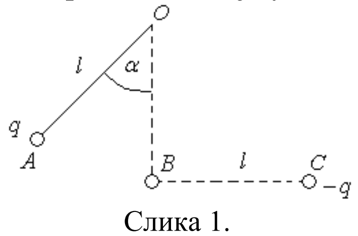
ДРЖАВНИ НИВО
26-27.04.2014.

1. Играч голфа изводи два ударца. У првом упућује лоптицу под углом од 60° према хоризонтали. После ког времена играч треба да изведе други ударац у истом смеру, под углом од 45° према хоризонтали, да би се лоптице судариле у лету? Почетна брзина лоптица у оба случаја износи $v_0 = 70\,\mathrm{m/s}$.

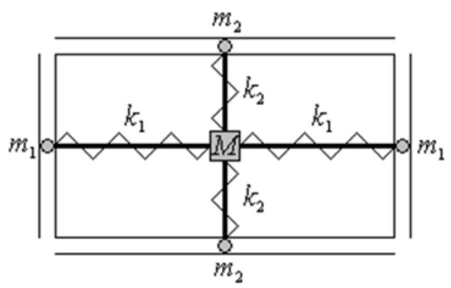
2. На лакој неистегљивој нити $\overline{OA}$ направљену од изолатора дужине l (окаченој у тачки O) виси куглица масе m и наелектрисања q. У тачки C је учвршћена друга куглица наелектрисања $-q$ као што је приказано на слици 1. Прва куглица се пусти без почетне брзине из тачке A у којој нит заклапа са вертикалом угао $\alpha = 45^{\circ}$. Ако је $\overline{OB} = \overline{BC} = l$ и ако тачке A, B и C леже у једној равни, одредити силу затезања нити у тренутку када прва куглица пролази кроз тачку B.

3. Систем приказан на слици 2 (а) се састоји од тела масе M кроз које су на различитим местима провучена два лака штапа тако да се међусобно не додирују. На крајевима штапова су причвршћене куглице маса m_1 и m_2 које могу да клизе по унутрашњости фиксираних цеви. Тело је са куглицама повезано опругама коефицијената еластичности k_1 и k_2 као на слици. Одредити однос k_1 и k_2 ако тело масе M описује трајекторију приказану на слици 2 (б), такозвану Лисажуову фигуру. Цео систем се налази у хоризонталној равни, и трења су занемарљива.

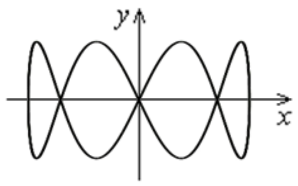
4. Хомоген метални штап масе $m = 1\,\mathrm{kg}$ и дужине $H = 0{,}74\,\mathrm{m}$ обешен је једним крајем о тачку O тако да око ње може слободно да ротира у равни цртежа. Штап додирује жицу чија отпорност по јединици дужине износи $r = 1\,\Omega/\mathrm{m}$ и која је постављена на удаљеност $h = 0{,}5\,\mathrm{m}$ од тачке O. Почетак жице A налази се на $L = 1\,\mathrm{m}$ од тачке додира жице и штапа када је штап постављен у вертикалан положај. Цео систем се налази у хомогеном магнетном пољу индукције $B = 1\,\mathrm{T}$ чији је правац нормалан на раван цртежа и смер према цртежу. Занемарити све отпорности у колу, осим отпорности поменуте хоризонталне жице. Сви делови кола, осим штапа, фиксирани су. Сматрати да Амперова сила делује у тачки која се налази на средини дела штапа кроз који тече струја. Занемарити међусобну интеракцију проводника. Одредити електромоторну силу батерије ако штап отклоњен за угао $\alpha = 30^{\circ}$ од вертикале остаје у том положају (слика 3).



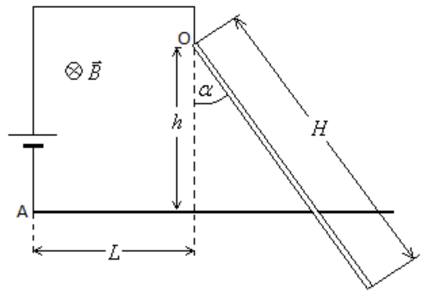
Слика 1.



Слика 2.а

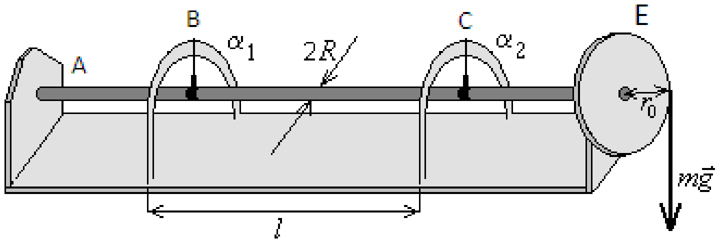


Слика 2.б



Слика 3.

5. Модуо смицања шипке статичком методом се одређује помоћу апаратуре приказане на слици. Цилиндрична шипка константног попречног пресека, чији модуо смицања се одређује, је на крају A чврсто везана са непомичним постољем, док је на крају D чврсто везана са диском E, који се може обртати око своје осе са занемарљивим трењем. Око диска E обмотана је метална сајла на чијем крају је носач тегова занемарљиве масе. На носач се стављају тегови различитих маса и тако се образује статички момент који уврће шипку за известан угао. За мерење угла увртања шипке служе две казаљке – B и C, које су учвршћене на почетку и на крају дела шипке на којем се врши мерење, и показују углове увртања на лучним скалама.



Релација која повезује модуо смицања G и торзиону константу c за увртање једног цилиндричног штапа или жице је дата обрасцем: $G = \dfrac{2lc}{\pi R^4}$, где је l - дужина штапа или жице, R - полупречник штапа или жице, а c торзиона константа. Торзиона константа се одређује релацијом $c = \dfrac{M}{\alpha}$, где је M - одговарајући момент спрега сила (односно у овом експерименту момент тежине тега којим вршимо оптерећење на шипку преко диска E) у односу на осу ротације и угла увртања α .

У табели су приказане вредности угла увртања у положају казаљке C (α_2) и на крају мерене дужине шипке, у положају казаљке B (α_1), за дато оптерећење (теговима одређених маса).
Вредност угла увртања на датој дужини шипке је једнака разлици очитаних углова $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$.

$m[\mathrm{kg}]$	2,00	4,00	6,00	8,00	10,00
$\alpha_1[^\circ]$	2,1	2,9	3,8	5,0	5,9
$\alpha_2[^\circ]$	4,3	7,2	10,4	14,1	17,1

НАПОМЕНА: Вредности угла α изразити у радијанима.
$R = (3{,}20 \pm 0{,}01)\,\mathrm{mm}$, $r_0 = (47{,}60 \pm 0{,}01)\,\mathrm{mm}$, $l = (50{,}0 \pm 0{,}1)\,\mathrm{cm}$.

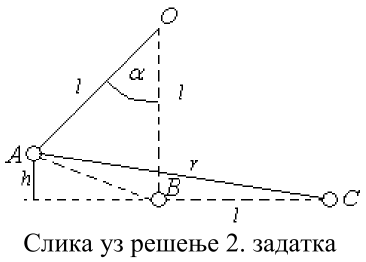
а) Изразити везу између угла увртања и масе тега којим се врши оптерећење.
б) Добијену линеарну зависност приказати на графику.
в) Користећи график, одредити модуо смицања шипке и проценити апсолутну грешку мерења.
Апсолутне грешке мерених величина су: $\Delta m = 0{,}01\,\mathrm{kg}$ и $\Delta\alpha_1 = \Delta\alpha_2 = 0{,}1^\circ$.

Сви задаци носе по 20 поена.

Задатке припремила: Ивана Ранчић, Природно-математички факултет, Нови Сад
Рецензент: Проф. др Мићо Митровић, Физички факултет, Београд
Председник Комисије за такмичење ДФС: Проф. др Мићо Митровић,Физички факултет, Београд

1. Компоненте почетне брзине првог хица износе: $v_{0x1}=\frac{1}{2}v_0$ **(1)**, $v_{0y1}=\frac{\sqrt{3}}{2}v_0$ **(1)**, а другог: $v_{0x2}=\frac{\sqrt{2}}{2}v_0$ **(1)** и $v_{0y2}=\frac{\sqrt{2}}{2}v_0$ **(1)**. Ако протицање времена посматрамо од тренутка упућивања друге лоптице, у тренутку када она путује време t, прва лоптица путује $t+\Delta t$, па њихове једначине кретања имају облик: $x_1=\frac{1}{2}v_0(t+\Delta t)$ **(1)**, $y_1=\frac{\sqrt{3}}{2}v_0(t+\Delta t)-\frac{1}{2}g(t+\Delta t)^2$ **(1)** и $x_2=\frac{\sqrt{2}}{2}v_0 t$ **(1)**, $y_2=\frac{\sqrt{2}}{2}v_0 t-\frac{1}{2}gt^2$ **(1)**. До судара куглица долази ако у истом тренутку имају једнаке координате. Из једнакости $x_1=x_2$ **(2)**, може се добити време путовања друге куглице до судара $t=\frac{\Delta t}{\sqrt{2}-1}$ **(3)**. Из једнакости $y_1=y_2$ **(2)**, елиминацијом t, може се одредити тражено време $\Delta t=\frac{v_0}{g}\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$ **(4)**, $\Delta t\approx 3{,}08\,\mathrm{s}$ **(1)**.

2. Други Њутнов закон се за прву куглицу може написати у облику $m\vec{a}=m\vec{g}+\vec{T}+\vec{F}_e$ **(1)**. Пошто се куглица креће по кружници полупречника l, њено центрипетално убрзање износи $a_c=\frac{v^2}{l}$ **(1)**. Када куглица пролази кроз тачку B на њу делује Кулонова сила у хоризонталном правцу, а њено центрипетално убрзање је вертикално па је $ma_c=\frac{mv^2}{l}=T-mg$ па је $T=\frac{mv^2}{l}+mg$ **(2)**. Закон одржања енергије за кретање куглице из тачке A у тачку B може се изразити преко одговарајућих кинетичких, гравитационих потенцијалних и електростатичких потенцијалних енергија: $E_{kA}+E_{pgA}+E_{peA}=E_{kB}+E_{pgB}+E_{peB}$ **(1)**, $E_{kA}=0$ **(0,5)**, $E_{pgA}=mgh$ **(0,5)**, $E_{peA}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q^2}{r}$ **(0,5)**, $E_{kB}=\frac{mv^2}{2}$ **(0,5)**, $E_{pgB}=0$ **(0,5)**, $E_{peB}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q^2}{l}$ **(0,5)**. Са слике се види да је $h=l(1-\cos\alpha)=l(1-\frac{\sqrt{2}}{2})$ **(2)** и $r=\sqrt{h^2+(l\sin\alpha+l)^2}=l\sqrt{3}$ **(2)**, па из закона одржања енергије следи израз: $mgl(1-\frac{\sqrt{2}}{2})-\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q^2}{l\sqrt{3}}=\frac{mv^2}{2}-\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q^2}{l}$ **(3)**, заменом mv^2 из ове једначине у израз за силу затезања добија се: $T=(3-\sqrt{2})mg+\frac{1}{2\pi\varepsilon}\frac{q^2}{l^2}(1-\frac{\sqrt{3}}{3})$ **(5)**.

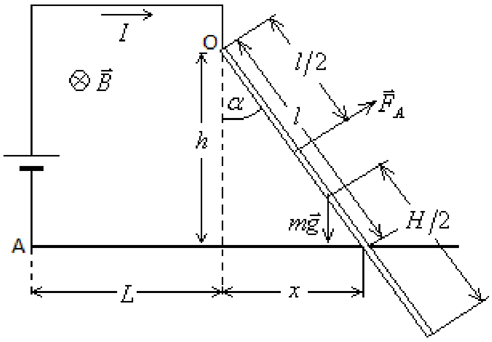


Слика уз решење 2. задатка

3. Пројекција једначине кретања тела на x-осу је $Ma_x=N_x-2k_1x$ **(2)**, где је N_x сила којом вертикалан штап делује на тело. Једначина кретања вертикалног штапа је $2m_2a_x=-N_x$ **(2)**, одакле се добија $(M+2m_2)a_x+2k_1x=0$ **(1)** па тело у правцу x-осе хармонијски осцилује са кружном фреквенцијом $\omega_x=\sqrt{\frac{2k_1}{M+2m_2}}$ **(2)**. У правцу y-осе: $Ma_y=N_y-2k_2y$ **(2)**, $2m_1a_y=-N_y$ **(2)**, $(M+2m_1)a_y+2k_2y=0$ **(1)**, $\omega_y=\sqrt{\frac{2k_2}{M+2m_1}}$ **(2)**. На основу облика трајекторије тела за време једног периода осцилација x-координате прођу четири периода осцилација y-координате: $T_x = 4T_y$, односно $\omega_y = 4\omega_x$ **(3)**. За тражени однос се добија $\frac{k_1}{k_2} = \frac{1}{16}\frac{M+2m_2}{M+2m_1}$ **(3).**

4. Отпорност дела жице кроз који протиче струја износи $R = r(L+x) = r(L + h\mathrm{tg}\alpha)$ **(2)**, па према Омовом закону кроз штап протиче струја: $I = \frac{E}{R} = \frac{E}{r(L+h\mathrm{tg}\alpha)}$ **(2)**. Дужина дела штапа кроз који протиче струја износи: $l = \sqrt{h^2+x^2} = h\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$ **(2)**. Интензитет Амперове силе која делује на штап износи $F_A = IlB = \frac{h\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}{r(L+h\mathrm{tg}\alpha)}EB$ **(2)**. Да би штап био у равнотежи момент силе Земљине теже и Амперове силе треба да буду једнаки $M_1 = M_2$ **(2)**. Моменти силе Земљине теже и Амперове силе износе: $M_1 = mg\frac{H}{2}\sin\alpha$ **(3)** и $M_2 = F_A\frac{l}{2} = \frac{Il^2B}{2} = \frac{h^2EB(1+\mathrm{tg}^2\alpha)}{2r(L+h\mathrm{tg}\alpha)}$ **(3)**. Тражена ЕМС је $E = \frac{mgHr(L+h\mathrm{tg}\alpha)\sin\alpha}{Bh^2(1+\mathrm{tg}^2\alpha)}$ **(3)**, $E \approx 14\,\mathrm{V}$ **(1)**.

НАПОМЕНА: Признаје се свако тачно решење где је E изражено преко познатих величина. На пример, $\cos\alpha^2 = 1/\left(1+\mathrm{tg}^2\alpha\right)$ па је $E = \frac{mgHr(L+h\mathrm{tg}\alpha)\sin\alpha}{Bh^2}\cos^2\alpha$.



Слика уз решење 4. задатка

5. а) Тражену релацију добијамо комбинацијом датих израза $G = \frac{2lc}{\pi R^4}$, $c = \frac{M}{\alpha}$ и израза за момент силе $M = mgr_0$ **(1)**

$\alpha = \frac{2lgr_0}{\pi R^4 G}\cdot m$ **(2)** $\Rightarrow \alpha = k\cdot m$, где је коефицијент правца $k = \frac{2lgr_0}{\pi R^4 G}$.

б) График **(5)**

$m[\mathrm{kg}]$	$\alpha_1\,[^\circ]$	$\alpha_2\,[^\circ]$	$\alpha\,[^\circ]$	$\alpha\,[\mathrm{rad}]$
2,00	2,1	4,3	2,2	0,0384 0,038
4,00	2.9	7,2	4,3	0.0750 0,075
6,00	3,8	10,4	6,6	0,1152 0,115
8,00	5,0	14,1	9,1	0,1588 0,159
10,00	5,9	17,1	11,2	0,1954 0,195

Правилно заокружене вредности у радијанима – **(1)**

Апсолутне грешке величина приказаних у табели су следеће:

$\Delta m = 0{,}01\,\mathrm{kg}$, $\Delta\alpha_1 = \Delta\alpha_2 = 0{,}1^\circ$, $\Delta\alpha = \Delta\alpha_1 + \Delta\alpha_2 = 0{,}2^\circ$, $\Delta\alpha = 0{,}0034\,\mathrm{rad} \approx 0{,}004\,\mathrm{rad}$

в) Одабирањем две неекспerименталне тачке са праве, А – између прве и друге и В – између претпоследње и последње експерименталне тачке, на пример $A(2{,}3\,\mathrm{kg}, 0{,}045\,\mathrm{rad})$ и $B(9{,}0\,\mathrm{kg}, 0{,}175\,\mathrm{rad})$ одређује се коефицијент правца праве као:

$$k = \frac{\alpha_B - \alpha_A}{m_B - m_A} = \frac{0{,}175 - 0{,}045}{9{,}0 - 2{,}3}\,\frac{\text{rad}}{\text{kg}} = 1{,}94 \cdot 10^{-2}\,\frac{\text{rad}}{\text{kg}} \approx 1{,}9 \cdot 10^{-2}\,\frac{\text{rad}}{\text{kg}}\ \textbf{(3)}.$$

Како су одговарајуће апсолутне грешке суседних експерименталних тачака (тачкама А и В) за вредности угла веће од тачности очитавања одговарајућих координата са графика узимамо одговарајућу грешку мерења ($\Delta\alpha_A = \Delta\alpha_B = 0{,}0034\,\text{rad}$). Пошто су одговарајуће апсолутне грешке суседних експерименталних тачака (тачкама А и В) мање од вредности најмањег подеока на ординати, узимамо апсолутну грешку очитавања координата са графика $\Delta m_A = \Delta m_B = 0{,}1\,\text{kg}$.

Апсолутна грешка израчунатог коефицијента правца је $\Delta k = \frac{\alpha_B - \alpha_A}{m_B - m_A}\left(\frac{\Delta\alpha_B + \Delta\alpha_A}{\alpha_B - \alpha_A} + \frac{\Delta m_B + \Delta m_A}{m_B - m_A}\right)$

$$\Delta k = \frac{0{,}175 - 0{,}045}{9{,}0 - 2{,}3}\,\frac{\text{rad}}{\text{kg}}\left(\frac{0{,}0034 + 0{,}0034}{0{,}175 - 0{,}045} + \frac{0{,}1 + 0{,}1}{9{,}0 - 2{,}3}\right) = 1{,}6 \cdot 10^{-3}\,\frac{\text{rad}}{\text{kg}} \approx 0{,}2 \cdot 10^{-2}\,\frac{\text{rad}}{\text{kg}}\ \textbf{(2)}.$$

Коефицијент правца је $k = (1{,}9 \pm 0{,}2) \cdot 10^{-2}\,\frac{\text{rad}}{\text{kg}}$.

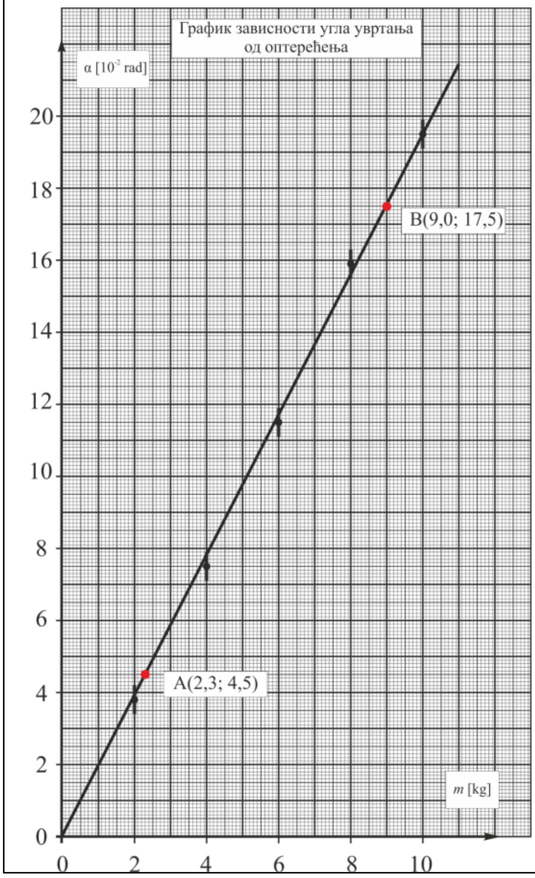
Па је модуо смицања шипке: $G = \frac{2 l g r_0}{\pi R^4 k} = \frac{2 \cdot 0{,}5 \cdot 9{,}81 \cdot 47{,}6 \cdot 10^{-3}}{3{,}14 \cdot (3{,}2 \cdot 10^{-3})^4 \cdot 1{,}94 \cdot 10^{-2}}\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2\text{rad}} = 7{,}31 \cdot 10^{10}\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2\text{rad}} \approx 7{,}3 \cdot 10^{10}\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2\text{rad}}$ **(4)**,

$$\Delta G = \frac{2 k l g r_0}{\pi R^4}\left(\frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta g}{g} + \frac{\Delta r_0}{r_0} + \frac{\Delta \pi}{\pi} + 4\frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta k}{k}\right)$$

$$\Delta G = \frac{2 \cdot 0{,}5 \cdot 9{,}81 \cdot 47{,}6 \cdot 10^{-3}}{3{,}14 \cdot (3{,}2 \cdot 10^{-3})^4 \cdot 1{,}94 \cdot 10^{-2}}\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2\text{rad}}\left(\frac{0{,}1}{50{,}0} + \frac{0{,}005}{9{,}81} + \frac{0{,}01}{47{,}60} + \frac{0{,}005}{3{,}14} + 4\frac{0{,}01}{3{,}20} + \frac{1{,}6 \cdot 10^{-3}}{1{,}94}\right)$$

$$\Delta G = 1{,}3 \cdot 10^{9}\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2\text{rad}} \approx 0{,}2 \cdot 10^{10}\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2\text{rad}}\ \textbf{(2)}.$$

Модуо смицања шипке је $G = (7{,}3 \pm 0{,}2) \cdot 10^{10}\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2\text{rad}}$.



Негативни поени за график, између осталог за:

- Без наслова -0.5 (наслов није $\alpha = f(m)$)
- Лоша размера -0.5 (график заузима мање од 1/4 простора папира)
- Недостају јединице -0.5
- Унете на осе мерене бројне вредности -0.5
- Ако изабране тачке нису између 1. и 2, односно претпоследње и последње експерименталне -0.5
- Изабране тачке нису у мереном опсегу -1
- Нису нанете грешке -0.5
- Лоша размера подеока -0.5

Негативни поени за рачун, између осталог за:

- Лоша размера – за коефицијент правца 50% предвиђених бодова
- Ако нису изабране добре тачке са графика – за тражене величине 50% предвиђених бодова
- Лоше заокруживање резултата или грешке, по -0.5 поена.
- Коришћење експерименталних тачака уместо тачака са графика не доноси поене, осим поена за линеаризацију.

НАПОМЕНА: Пошто график пролази кроз координатни почетак (сигурна тачка је 0,0) довољна је једна неекспериментална тачка (В), између претпоследње и последње експерименталне тачке, за одређивање коефицијента правца (грешка овог одређивања је мања). Прихватају се решења и са једном и са две неексперименталне тачке.