39. САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ
Београд, 28.-30. мај 2004.

Решења задатака за Општу групу

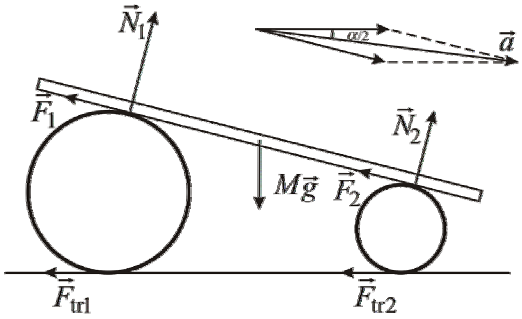
Теоријски задатак 1

Део А

Шипка на цилиндрима

Како се цилиндри крећу без проклизавања то је $\alpha_1 r_1 = a_1$ и $\alpha_2 r_2 = a_2$. Како даска не проклизава по цилиндрима убрзање даске је једнако убрзањима додирних тачака цилиндара и даске (слика 1):

Слика 1



$a = 2a_1 \cos\frac{\alpha}{2} = 2a_2 \cos\frac{\alpha}{2}$. Као што се види са слике вектор убрзања даске са хоризонталом заклапа угао $\alpha/2$. Дакле једначине кретања за шипку су:

$$Mg\sin\frac{\alpha}{2} + N_1 \sin\frac{\alpha}{2} + N_2 \sin\frac{\alpha}{2} - F_1 \cos\frac{\alpha}{2} - F_2 \cos\frac{\alpha}{2} = Ma\,,$$

$$Mg\cos\frac{\alpha}{2} = N_1 \cos\frac{\alpha}{2} + N_2 \cos\frac{\alpha}{2} + F_1 \sin\frac{\alpha}{2} + F_2 \sin\frac{\alpha}{2}\,.$$

Једначине кретања за транслацију и ротацију цилиндара су:

$0 = F_i \cos\alpha - N_i \sin\alpha - F_{tri}$, $F_i r_i + F_{tri} r_i = 0$, где је $i = 1,2$, одакле следи да је

$$F_i = \frac{N_i \sin\alpha}{1+\cos\alpha} = N_i \tan\frac{\alpha}{2}\,.$$

Заменом добијеног израза у прву једначину за шипку добија се да је убрзање шипке:

$$a = g\sin\frac{\alpha}{2}\,.$$

Део Б

Релативистичка ракета

Нека је брзина ракете у неком тренутку v. Закон одржања импулса за систем гориво+ракета у инерцијалном систему који се креће брзином v гласи: $m \cdot \mathrm{d}v' = -\mathrm{d}m \cdot u$.

Из релативистичког закона слагања брзина следи $\mathrm{d}v' = \dfrac{\mathrm{d}v}{1-\dfrac{v^2}{c^2}}$.

Заменом у претходну једначину добија се: $\dfrac{\mathrm{d}v}{1-\dfrac{v^2}{c^2}} = -\dfrac{\mathrm{d}m}{m}u$.

Интеграцијом се добија: $v = c\dfrac{1-\left(\dfrac{m}{m_0}\right)^{2u/c}}{1+\left(\dfrac{m}{m_0}\right)^{2u/c}}$.

Део В

Бор – Зомерфелдов услов кватновања

а) Импулс честице која се налази у бесконачно дубокој потенцијалној јами је константан. Честица се еластично одбија од зидова потенцијалне јаме и врши периодично кретање па је $\oint p\mathrm{d}x = p2l = 2\pi\hbar n$. Одавде следи да су дозвољене вредности импулса честице $p_n = \dfrac{n\hbar\pi}{l}$. Дозвољене енергије честице су: $E_n = \dfrac{p^2}{2m} = \dfrac{n^2\hbar^2\pi^2}{2ml^2}$.

б) Једначина кретања честице је: $m\ddot{x} + \alpha x = 0$, па је $x = A\sin(\omega t + \varphi)$, где је $\omega = \sqrt{\dfrac{\alpha}{m}}$. Импулс честице је $p = m\dot{x} = mA\omega\cos(\omega t + \varphi)$. Из Бор-Зомерфелдовог услова квантовања следи: $\int\limits_0^{2\pi/\omega} p\dot{x}\mathrm{d}t = \int\limits_0^{2\pi/\omega} mA^2\omega^2\cos^2(\omega t + \varphi)\mathrm{d}t = mA^2\omega\pi = 2\pi n\hbar$. Дозвољене вредности енергије честице су: $E_n = \dfrac{1}{2}m\omega^2 A^2 = n\hbar\omega.$

Део Г

Семиемпиријска формула за масу језгра

Бета стабилна језгра су она за које је маса језгра минимална за дати масени број. Дакле потребно је наћи минимум функције $M_j(Z,A)$ за дато A. Из услова $\dfrac{\mathrm{d}M_j}{\mathrm{d}Z} = 0$ добија се: $(m_p - m_n)c^2 + 2a_c\dfrac{Z}{A^{1/3}} - 4a_a\dfrac{(A-2Z)}{A} = 0$, одакле следи да је редни број бета стабилног језгра дат изразом: $Z_{st} = \dfrac{(4a_a + (m_n - m_p)c^2)A}{8a_a + 2a_c A^{2/3}}$. Заменом бројних вредности добија се $Z_{st} = 11$.

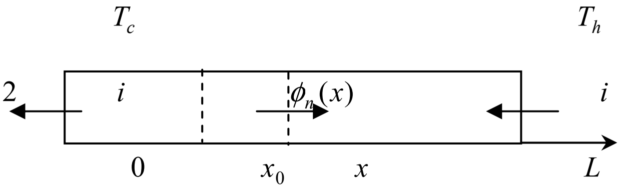
Теоријски задатак 2

Термоелектрично хлађење

а) Електрични отпор полупроводника N типа је $R_n = \dfrac{L}{\sigma_n A}$, где је σ_n електрична проводност цилиндра, док за P-тип важи $R_p = \dfrac{L}{\sigma_p A}$. За сегмент цилиндра N типа дужине $x - x_0$ Џулова топлота која се у јединици времена издваја због протицања електричне струје i је дата изразом $P_{Jn} = \dfrac{(x-x_0)i^2 R_n}{L} = \dfrac{(x-x_0)i^2}{\sigma_n A}$.

б) Размотримо најпре топлотне и електричне струје које теку кроз цилиндар начињен од полупроводника N типа, као што је приказано на слици 2:

Слика 2



Нека је $\phi_n(x)$ струја топлотног провођења која протиче кроз цилиндар, а $T(x)$ температура на попречном пресеку. Тада је на основу Фуријеовог закона:

$$\phi_n(x) = -k_n A \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}.$$

Једначина топлотног баланса гласи:

$\phi_n(x) - \phi_n(x_0) = \dfrac{(x-x_0)}{L} i^2 R_n$, tj. $-k_n A \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = \phi_n(x_0) + \dfrac{i^2 R_n}{L}(x - x_0)$.

Решавањем претходне једначине за $x_0 = 0$ добија се:

$-k_n A\left[T(x) - T(0)\right] = \phi_n(0)x + \dfrac{i^2 R_n}{L}\dfrac{x^2}{2}$. Како је $T(L) = T_h$ и $T(0) = T_c$, за $x = L$ из претходне једначине се добија:

$$\phi_n(0) = -k_n \frac{A}{L}(T_h - T_c) - \frac{i^2 R_n}{2}.$$

Џулова топлота која се издваја на бакарним листићима као и губици електричне енергије на споју су занемарљиви. Како је температура бакарног листића константна нема топлотног провођења од једног ка другом полупроводном цилиндру. Обележимо топлотну струју коју апсорбује хладни спој са полупроводником N типа са $\dot{q}_n(0)$. Тада је:

$\dot{q}_n(0) - \phi_n(0) = (\alpha_{Cu} - \alpha_n)T_c i$, одакле је:

$$\dot{q}_n(0) = (\alpha_{Cu} - \alpha_n)T_c i - k_n \frac{A}{L}(T_h - T_c) - \frac{i^2 R_n}{2}.$$

в) Слична анализа се може применити и на полупроводник P типа. Тада је:

$R_p = \dfrac{L}{\sigma_p A}$, $\phi_p(0) = -k_p \dfrac{A}{L}(T_h - T_c) - \dfrac{i^2 R_p}{2}$, $\dot{q}_p(0) - \phi_p(0) = (\alpha_p - \alpha_{Cu})T_c i$.

Како је $\dot{q}_c = \dot{q}_p(0) + \dot{q}_n(0)$, то је:

$$\begin{aligned}\dot{q}_c &= (\alpha_p - \alpha_{Cu})T_c i + \phi_p(0) + (\alpha_{Cu} - \alpha_n)T_c i + \phi_n(0) \\ &= (\alpha_p - \alpha_n)T_c i - (k_p + k_n)\frac{A}{L}(T_h - T_c) - \frac{i^2(R_n + R_p)}{2} \cdot\end{aligned}$$

Дакле тражени коефицијенти су: $a = \left(k_p + k_n\right)\dfrac{A}{L}$ и $b = \dfrac{R_p + R_n}{2} = \dfrac{L}{2A}\left(\dfrac{1}{\sigma_p} + \dfrac{1}{\sigma_n}\right)$.

г) Из $\dot{q}_c = \beta T_c i - a(T_h - T_c) - bi^2$, где је $\beta = \alpha_p - \alpha_n$ следи да је: $T_c = \dfrac{aT_h + bi^2 + \dot{q}_c}{\beta i + a}$.

Како је $\dot{q}_c \geq 0$ то је $T_c \geq T_{c\min}(i) = \dfrac{aT_h + bi^2}{\beta i + a}$. Даље је потребно наћи минимум израза на десној страни. Минимум се постиже за $\dfrac{\mathrm{d}T_{c\min}}{\mathrm{d}i} = 0$, одакле је: $i = \dfrac{a}{\beta}\left(\sqrt{1 + \dfrac{T_h \beta^2}{ab}} - 1\right)$. Тражена минимална температура је :

$$T_{c\min} = \frac{2ab}{\beta^2}\left(\sqrt{1 + \frac{\beta^2}{ab}T_h} - 1\right) = 230\,\mathrm{K}.$$

Теоријски задатак 3

Електромагнетна левитација

Део А

а) Јачина магнетног поља $\vec{B}$ прстена кроз који протиче електрична струја i у тачки на $z-$оси са координатом z је: $\vec{B} = B(z)\vec{e}_z = \dfrac{\mu_0 i b^2}{2(z^2 + b^2)^{3/2}}\vec{e}_z$.

Интензитет магнетне силе која делује на магнет је дат изразом:

$$F_m = q_m B\left(D - \frac{d}{2}\right) - q_m B\left(D + \frac{d}{2}\right)$$

$$= \frac{\mu_0 i b^2 q_m}{2}\left\{\frac{1}{\left[(D - \frac{d}{2})^2 + b^2\right]^{3/2}} - \frac{1}{\left[(D + \frac{d}{2})^2 + b^2\right]^{3/2}}\right\}$$

$$\approx \frac{3\mu_0 i b^2 (q_m d) D}{2(D^2 + b^2)^{5/2}}$$

Да би се магнет налазио у равнотежи мора да важи $F_m = Mg$. Дакле тражена јачина струје је:

$i = \dfrac{2Mg(D^2 + b^2)^{5/2}}{3\mu_0 b^2 m D}$, где је $m = q_m d$.

б) Када се магнет изведе из равнотежног положаја за мало растојање ε тада је:

$$F_m = \frac{3\mu_0 i b^2 m(D + \varepsilon)}{2\left[(D + \varepsilon)^2 + b^2\right]^{5/2}} \approx \frac{3\mu_0 i b^2 m(D + \varepsilon)}{2(D^2 + b^2)^{5/2}}.$$

Интензитет резултатнтне силе која делује на магнет је:

$F = Mg - F_m = -\dfrac{3\mu_0 i b^2 m}{2(D^2 + b^2)^{5/2}}\varepsilon = M\ddot{\varepsilon}$, па је фреквенција малих осцилација магнета:

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3\mu_0 ib^2 m}{2M(D^2+b^2)^{5/2}}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{D}}\ .$$

Део Б

в) Када се магнет налази на $z-$оси и када је његова координата z, интензитет $z-$компоненте јачине магнетног поља магнета у тачки која се налази у равни прстена на растојању r од његовог центра је:

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{-3m\frac{z^2}{z^2+r^2}+m}{(z^2+r^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 m}{4\pi}\left[\frac{1}{(z^2+r^2)^{3/2}} - \frac{3z^2}{(z^2+r^2)^{5/2}}\right].$$

Флукс магнетног поља кроз прстен је:

$$\Phi = \int \vec{B}\cdot\vec{e}_z \mathrm{d}S = 2\pi\int B_z r\mathrm{d}r$$

$$= \frac{\mu_0 m}{2}\left\{\int_0^b \frac{r}{(z^2+r^2)^{3/2}}\mathrm{d}r - \int_0^b \frac{3z^2 r}{(z^2+r^2)^{5/2}}\mathrm{d}r\right\} = -\frac{\mu_0 m b^2}{2(z^2+b^2)^{5/2}}.$$

Индукована електромоторна сила у прстену је:

$\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{3\mu_0 m b^2 z v}{2R(z^2+b^2)^{5/2}}$, где је $v = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ брзина магнета.

Јачина индуковане струје која протиче кроз прстен је:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{3\mu_0 m b^2 z v}{2R(z^2+b^2)^{5/2}}\ .$$

Магнетно поље индуковане струје на $z-$оси је:

$$\vec{B}_{ind} = B_{ind}(z)\vec{e}_z = \frac{\mu_0 I b^2}{2(z^2+b^2)^{3/2}}\vec{e}_z = -\frac{3\mu_0^2 m b^4 z v}{4R(z^2+b^2)^4}\vec{e}_z\ .$$

Магнетне сила која делује на магнет је:

$$\vec{F}_m = q_m\left[B_{ind}(z-\frac{d}{2}) - B_{ind}(z+\frac{d}{2})\right]\vec{e}_z$$

$$= \frac{3\mu_0^2 m b^4 v q_m}{4R}\left\{-\frac{z-\frac{d}{2}}{\left[(z-\frac{d}{2})^2+b^2\right]^4} + \frac{z+\frac{d}{2}}{\left[(z+\frac{d}{2})^2+b^2\right]^4}\right\}\vec{e}_z,$$

тј. интензитет магнетне силе која делује на магнет је

$$F_m \approx \frac{3\mu_0^2 m^2 b^4 v}{4R(z^2+b^2)^5}\left(b^2-7z^2\right).$$

г) Индукована електромоторна сила је: $\mathcal{E} = -\frac{3\mu_0 m b^2 z v}{2R(z^2+b^2)^{5/2}} \approx -\frac{3\mu_0 m z v}{2b^3}$.

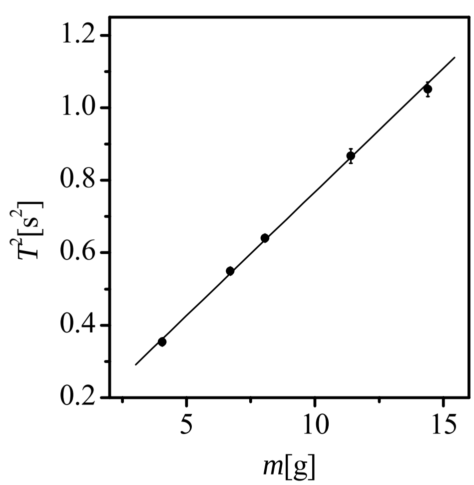
Како је $z = h\cos\omega t$, то је $v = -\omega h\sin\omega t$, па је $\mathcal{E} = \frac{3\mu_0 m\omega h^2}{4b^3}\sin 2\omega t$.

Савезно такмичење 2004.

Решење експерименталног задатка 1

Мерено је време t потребно да опруга оптерећена масом m направи n осцилација. Период осциловања је $T=\frac{t}{n}$, где је $n=10$ број осцилација. Време t се је одређено из три директна мерења, $t_s=\frac{t_1+t_2+t_3}{3}$, а апсолутна грешка као максимално одступање $\left|t_i-t_s\right|_{max}$. Пошто је $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, из линеарне зависности $T^2=\frac{4\pi^2}{k}m$ може се одредити непозната константа опруге k. Резултати мерења дати су у табели.

	$m[g]$	$t_i[s]$	$t_S[s]$	$\Delta t[s]$	$T=\frac{t}{n}[s]$	$\Delta T=\frac{\Delta t}{n}[s]$	$T^2[s^2]$	$\Delta T^2=2T\Delta T[s^2]$
1	4.05	5.94 6.04 5.92	5.967 5.97	0.073 0.08	0.5967 0.597	0.0073 0.008	0.356 0.36	0.0087 0.01
2	6.70	7.47 7.39 7.37	7.407 7.41	0.063 0.07	0.7407 0.741	0.0063 0.007	0.549 0.55	0.0093 0.01
3	8.05	8.03 8.06 7.91	8.000 8.00	0.090 0.09	0.8000 0.800	0.0090 0.009	0.640 0.64	0.011 0.01
4	11.4	9.31 9.25 9.38	9.313 9.31	0.067 0.07	0.9313 0.931	0.0067 0.007	0.867 0.87	0.012 0.02
5	14.4	10.31 10.20 10.25	10.253 10.25	0.057 0.06	1.0253 1.025	0.0057 0.006	1.051 1.05	0.012 0.02



Са графика $T^2=f(m)$, одређује се коефицијент правца праве избором две неексперименталне тачке, нпр. $A\,(5.3\text{g};\ 0.45\text{s}^2)$ између прве и друге и $B\,(12.6\text{g};\ 0.95\text{s}^2)$ између последње и претпоследње експерименталне тачке.

Коефицијент правца се израчунав као:

$$a = \frac{T_{\mathrm{B}}^2 - T_{\mathrm{A}}^2}{m_{\mathrm{B}} - m_{\mathrm{A}}} = \frac{(0.95 - 0.45)\mathrm{s}^2}{(12.6 - 5.3)\mathrm{g}} = 68.5\frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{kg}} .$$

Релативна грешка се израчунава као $\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta(T^2)_{\mathrm{B}} + \Delta(T^2)_{\mathrm{A}}}{T_{\mathrm{B}}^2 - T_{\mathrm{A}}^2} + \frac{\Delta m_{\mathrm{B}} + \Delta m_{\mathrm{A}}}{m_{\mathrm{B}} - m_{\mathrm{A}}}$

$\frac{\Delta a}{a} = \frac{0.0093 + 0.012}{0.95 - 0.45} + \frac{0.1 + 0.1}{12.6 - 5.3} = 0.07 \Rightarrow \Delta a = 4.8\frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{kg}}$, па је $a = (68 \pm 5)\frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{kg}}$.

в) Пошто је $a = \frac{4\pi^2}{k}$, следи да је $k = \frac{4\pi^2}{a} = \frac{4\pi^2}{68.5} = 0.576\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$.

$\frac{\Delta k}{k} = \frac{\Delta a}{a} = \Rightarrow \Delta k = 0.04\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$.

Тражена константа еластичности опруге износи:

$$k = (0.58 \pm 0.04)\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} .$$

Савезно такмичење 2004.

Решење експерименталног задатка 2

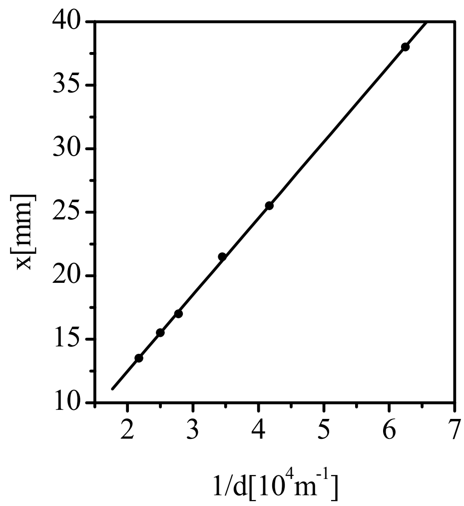
Растојање између нултог максимума и максимума првог реда одређено је формулом $x = \frac{z}{2n} = \lambda L \frac{1}{d}$, где је y мерено растојање између максимума n-тог реда.

$1/d$ [$10^4 m^{-1}$]	6.250	4.167	3.448	2.778	2.500	2.174
z [mm]	76	51	43	34	62	81
n	1	1	1	1	2	3
x [mm]	38.0	25.5	21.5	17.0	15.5	13.5

Процењена грешка мерења растојања крајњих видљивих максимума: Δx = 1 mm.

Растојање решетке и екрана је $L = (0.95 \pm 0.02)\mathrm{m}$.

У наведеној зависности $x = f(1/d)$, фактор λL представља коефицијент правца праве. Нацртан је график $x = f(1/d)$.



Ради израчунавања коефицијента правца праве коришћењем графика, изабране се две неексперименталне тачке са праве, на пример A($2.6 \cdot 10^4$ m^{-1}, 16 mm) и B($6 \cdot 10^4$ m^{-1}, 36.6 mm).

Грешке очитавања са графика су $\Delta\left(\frac{1}{d}\right)_A = \Delta\left(\frac{1}{d}\right)_B = 0.02 \cdot 10^4\,\mathrm{m}^{-1}$.

Дакле, коефицијент правца и његова грешка износе:

$$k = \frac{x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A}}{\left(\frac{1}{d}\right)_\mathrm{B} - \left(\frac{1}{d}\right)_\mathrm{A}} = \frac{(36.6 - 16)\mathrm{mm}}{(6 - 2.6)\cdot 10^4\,\mathrm{m}^{-1}} = 6.06\cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}^2\,,$$

$$\Delta k = k \cdot \left(\frac{\Delta x_\mathrm{A} + \Delta x_\mathrm{B}}{x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A}} + \frac{\Delta\left(\frac{1}{d}\right)_\mathrm{A} + \Delta\left(\frac{1}{d}\right)_\mathrm{B}}{\left(\frac{1}{d}\right)_\mathrm{B} - \left(\frac{1}{d}\right)_\mathrm{A}} \right)\text{, односно}$$

$$\Delta k = 6.06\cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}^2 \left(\frac{1+1}{36.6-16} + \frac{0.02+0.02}{6-2.6} \right) = 0.66\cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}^2\,.$$

Коефицијент правца износи $k = (6.1 \pm 0.7)\cdot 10^{-7}\ \mathrm{m}^2$.

Из релације $k = L\lambda$, следи да је таласна дужина светлости $\lambda = \frac{k}{L}$, односно

$$\lambda = \frac{6.06\cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}^2}{0.95\mathrm{m}} = 6.38\cdot 10^{-7}\,\mathrm{m} = 638\mathrm{nm}$$

а апсолутна грешка $\Delta\lambda = \lambda \cdot \left(\frac{\Delta k}{k} + \frac{\Delta L}{L} \right) = 6.38\cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}\left(\frac{0.66}{6.06} + \frac{0.02}{0.95} \right)$.

Дакле, $\Delta\lambda = 0.83\cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}$.

Тражена вредност таласне дужине износи

$$\lambda = (6.4 \pm 0.9)\cdot 10^{-7}\mathrm{m} = (640 \pm 90)\ \mathrm{nm}.$$